ACCELERATION DE LA CONVERGENCE EN ANALYSE NUMERIQUE.

I. Théorie des récurrences.
II. Leçons sur les fractions continues.
III. Leçons sur les approximants de Padé.
IV. Les algorithmes d'accélération de la convergence des suites.
V. Applications diverses.

Cours proposé par André Hautot aux étudiants de dernière année d'études de physique à l'Université de Liège.

Plan du cours.

Ce cours s'articule en cinq chapitres :

1. Etude des récurrences ou équations aux différences finies. Un grand nombre d'algorithmes numériques sont récursifs. Leurs propriétés se déduisent de la théorie des récurrences. Cette théorie fait l'objet du premier chapitre.

2. Etude des fractions continues, simples et généralisées. Celles-ci constituent une méthode classique quoique trop peu connue, d'accélération de la convergence.

3. Etude des méthodes classiques de triangles. Les algorithmes de triangles sont en fait des méthodes sommatoires dont certaines, assez anciennes, remontent à Euler, Newton et MacLaurin. D'autres (Borel, Cesaro), plus récentes, datent du début de ce siècle. Ces méthodes sont basées sur un ensemble de schémas **linéaires** de construction des suites $\{t_i\}$ à partir des suites $\{s_i\}$ à accélérer. Ils sont relativement peu efficaces. Pourtant, il est particulièrement intéressant d'analyser les raisons de cette relative inefficacité car cela permet de mettre en oeuvre les améliorations possibles.

4. Etude des algorithmes récents E, ε, ρ, Δ^2, θ, Levin, GBW, Steffensen. Ceux-ci sont **non linéaires**. Ils tiennent d'ailleurs leur efficacité de cette non-linéarité. Une attention particulière est accordée à l'algorithme ε particulièrement utile aux physiciens.

5. Etude de quelques exemples qui montrent l'intérêt des méthodes non linéaires en analyse numérique (calculs de racines, de valeurs propres, d'intégrales, de fonctions, etc...).

Afin de ne pas alourdir l'exposé, nous admettrons certains théorèmes, sans démonstration. Les nombreux exemples exposés permettent d'ailleurs d'en comprendre très rapidement l'énoncé avec un maximum d'efficacité.

Références.

Voici quelques livres de références incontournables qui parlent des sujets classiques abordés dans ce cours. Les sujets plus pointus ne sont couverts que par la littérature spécialisée.

W. B. Jones and W. J. Thron : Continued fractions. Encyclopedia of Math. and its Applications. Vol. 11. Addison-Wesley (1980).

G. A. Baker Jr and P. Graves-Morris : Pade approximants. Ibidem, Vol. 13&14 (1981).

C. Brezinski : Accélération de la convergence numérique. Lecture Notes in Math. Vol 584. Springer-Verlag, Berlin (1977).

J. Wimp : Sequence transformations and their applications. Math in Science & Engineering. Vol. 514. Academic Press, N-Y (1984).

J. Wimp : Computations with recurrence relations. Pitman, Boston (1984).

Introduction.

Un algorithme peut être considéré comme un ensemble ordonné d'opérations arithmétiques et logiques qui transforment un ensemble de données en un ensemble de résultats.

Données $\rightarrow$ Algorithme $\rightarrow$ Résultats

Un grand nombre d'algorithmes sont itératifs. Cela signifie qu'on calcule les résultats par approximations successives, engendrant à chaque itération un terme s_i , de la suite, scalaire ou vectorielle, $\{s_0 , s_1 , s_2 , ...\}$, qui converge vers le résultat cherché s_∞ , limite de la suite. Ce schéma, simple en théorie, soulève en fait deux questions essentielles :

- Le résultat final est-il fiable ?
- Est-il atteint après un temps de calcul raisonnable ?

1. Fiabilité des résultats.

Les données étant encodées avec n chiffres significatifs (donc à la précision 10^{-n}), le problème se pose tout naturellement de savoir si on est en droit d'espérer que les résultats seront également précis avec n chiffres. En fait, il n'en est rien pour deux raisons :

a) Certains **problèmes** sont mathématiquement mal conditionnés. Considérons l'exemple très simple du système linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} x + 3y = 14 \\ 3.5x + 10.501y = 49.004 \end{cases}$$

dont la solution exacte vaut : x = 2 et y = 4. Si on perturbe légèrement le second membre en y remplaçant le nombre 49.004 par 49.001, on constate que la solution s'en trouve modifiée radicalement. Elle vaut, cette fois : x = 11 et y = 1 ! On sait qu'un ordinateur encode généralement les données d'un problème en commettant une erreur de troncature correspondant au premier chiffre négligé. Un problème mal conditionné présente une grande sensibilité à toute erreur d'encodage des données en sorte que les résultats sont entachés d'une erreur amplifiée parfois considérablement. Dans l'exemple traité, la cause de l'erreur réside dans la valeur proche de zéro du déterminant de la matrice du système.
Il en résulte que la matrice inverse possède de grands coefficients qui amplifient la moindre incertitude sur la valeur des termes du second membre. En effet, on a :

$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$
$$A\vec{x}^{*} = \vec{b} + \delta\vec{b} \Rightarrow \vec{x}^{*} = A^{-1}\vec{b} + A^{-1}\delta\vec{b} \qquad d'où$$
$$\delta\vec{x} = \vec{x}^{*} - \vec{x} = A^{-1}\delta\vec{b}$$

Cette erreur cesse d'être négligeable dès que dtm(A) est proche de zéro. Dans l'exemple choisi, on a :

$$\delta\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.003 \end{pmatrix} \qquad \text{d'où:} \qquad \delta\vec{x} = \begin{pmatrix} 10501 & -3000 \\ -3500 & 1000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -0.003 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Un autre exemple classique est celui de la matrice n x n de Hilbert $H_{ij} = (1/(i+j))$ dont les valeurs propres, et par conséquent aussi le déterminant, sont tous proches de zéro dès que n est grand. Aucun algorithme travaillant avec un nombre limité de chiffres significatifs ne peut éviter l'écueil que représente le mauvais conditionnement d'un problème. Sauf si l'on peut recourir à un logiciel, tel que Mathematica, qui travaille en arithmétique exacte, la seule parade consiste à augmenter, parfois de façon considérable, le nombre des chiffres significatifs encodés en recourant aux précisions doubles (16 chiffres) ou quadruples (33 chiffres).
Les systèmes chaotiques, en physique, sont, eux aussi, des systèmes mal conditionnés : ils présentent la sensibilité aux conditions initiales qui rend toute prédiction de l'évolution du système impossible au-delà d'un temps parfois très court.

b) Certains **algorithmes** sont instables.
On se gardera de confondre cette situation avec celle décrite au point a) ci-dessus. Cette fois, le problème mathématique posé est bien conditionné mais c'est l'algorithme mis en oeuvre pour le résoudre qui ne convient pas car il est instable.
On rappelle que le calcul par ordinateur engendre inévitablement deux sources d'erreurs :
- les erreurs de troncature qui résultent de l'arithmétique finie du processeur qui l'amène à remplacer la fraction 1/3 par 0.33333333, par exemple.
- les erreurs d'arrondi qui proviennent de la soustraction de quantités voisines avec la perte de chiffres significatifs que cela implique.

Que deviennent ces erreurs au cours d'un calcul un peu long, comportant des milliers d'opérations arithmétiques élémentaires ? En d'autres termes, comment se propagent les erreurs de troncature et d'arrondi ? On sait que le processeur arrondit par excès ou par défaut chaque résultat intermédiaire en sorte que, naïvement, on pourrait penser qu'au terme d'un calcul comportant un très grand nombre, N, d'opérations élémentaires, la compensation est à peu près exacte. Statistiquement, chacun sait qu'il n'en est rien et que ce type d'erreur croît lentement comme $\sqrt{N}$. Il est plutôt rare cependant que cette erreur altère le résultat de façon grossière. L'erreur qu'introduit un algorithme instable est beaucoup plus grave que cela. Elle peut croître selon une loi f(N), exponentielle, par exemple, beaucoup plus rapidement croissante que $\sqrt{N}$. Nous verrons des exemples où une erreur de troncature initiale explose littéralement en cours de calcul au point que plus aucun chiffre calculé n'est correct dans le résultat final.

Lorsqu'un algorithme présente une telle instabilité, il est hors de question de l'utiliser et il faut en chercher un autre qui effectue le même travail de manière plus stable. Si cet algorithme n'est pas connu, la seule ressource est, à nouveau, de travailler avec une réserve accrue de chiffres significatifs.

En résumé, on distinguera :
- l'instabilité intrinsèque d'un problème liée à son mauvais conditionnement mathématique qu'aucun algorithme ne peut lever;
- l'instabilité extrinsèque, liée au choix d'un mauvais algorithme pour traiter un problème qui, par ailleurs, est mathématiquement bien conditionné.

Remarques pratiques : En l'absence d'erreurs, entraînant l'arrêt du programme (division par zéro, overflow, underflow, ...) un ordinateur poursuit son calcul jusqu'à son terme et affiche un résultat sans se préoccuper d'aberrations éventuelles liées au mauvais conditionnement du problème ou à l'instabilité de l'algorithme utilisé. Si on ne dispose d'aucune procédure de vérification destinée à s'assurer du caractère plausible du résultat, il est prudent de procéder à quelques essais numériques qui auront au moins le mérite de mettre en évidence d'éventuels problèmes de précision:

- En modifiant légèrement les conditions initiales (données) tout en maintenant la précision de l'ordinateur constante, on pourra détecter si le problème présente la sensibilité aux conditions initiales. Ce sera le cas toutes les fois que la solution perturbée s'écartera progressivement et parfois même violemment de la solution non perturbée.
- En maintenant les conditions initiales mais en augmentant le nombre de chiffres significatifs utilisés au cours des calculs, on s'assurera du degré d'instabilité induit par l'algorithme lui-même en comparant le nombre de chiffres altérés dans les résultats.
On agira en conséquence.

2. Problèmes liés à la vitesse de convergence de l'algorithme.

Il n'est pas toujours facile d'estimer le temps qui sera nécessaire à un ordinateur pour effectuer un programme donné. Cela dépend en effet de la rapidité avec laquelle le processus itératif mis en oeuvre converge vers sa limite. Lorsque ce temps devient prohibitif, il est déraisonnable de poursuivre les calculs sur base d'une vitesse de convergence aussi faible. Une stratégie plus efficace consiste à rechercher par voie théorique dans quelle mesure il serait possible de remplacer la suite $\{s_0, s_1, s_2, ...\}$ lentement convergente, par une autre suite $\{t_0, t_1, t_2, ...\}$ qui convergerait beaucoup plus vite vers la même limite. De telles transformations $\{s_i\}\to\{t_i\}$ existent effectivement, valables pour une classe étendue d'algorithmes lentement convergents. Certaines sont très anciennes et remontent à Euler et Newton. D'autres, nettement plus efficaces il est vrai, sont beaucoup plus récentes. C'est un des buts de ce cours de faire le point sur les techniques existantes.

CHAPITRE I

THEORIE DES RECURRENCES.

On appelle récurrence d'ordre j toute relation du type suivant:

$$f(C_k, C_{k-1}, C_{k-2}, ..., C_{k-j}, k) = h_k$$

qui relie j+1 valeurs consécutives de la suite des C_k pour toutes valeurs entières de k. Cette récurrence est linéaire si la relation f est linéaire sur les C_k ; elle est non linéaire dans le cas contraire. Dans le cas où elle est linéaire, elle est homogène si le terme indépendant des C_k est absent et elle est à coefficients constants si f ne dépend pas explicitement de k. On reconnaît une terminologie déjà utilisée dans la théorie des équations différentielles. On peut accroître l'analogie en introduisant la notation de différence finie Δ. Pour être précis, nous introduisons les opérateurs E et Δ suivants:

$$EC_k = C_{k+1} \qquad d'où \;\; on \;\; tire: \qquad E^n C_k = C_{k+n}$$

$$\Delta C_k = C_{k+1} - C_k \qquad d'où \qquad \Delta^2 C_k = C_{k+2} - 2C_{k+1} + C_k \qquad etc\ ...$$

En fait, on a de toute évidence: Δ=E-1.
Aux ordres plus élevés, on trouve sans peine:

$$\Delta^2 = (E-1)^2 = E^2 - 2E + 1$$
$$\Delta^3 = (E-1)^3 = E^3 - 3E^2 + 3E - 1 \qquad etc...$$

Ces relations s'inversent sans peine sous la forme:

$$E = \Delta + 1$$
$$E^2 = \Delta^2 + 2\Delta + 1$$
$$E^3 = \Delta^3 + 3\Delta^2 + 3\Delta + 1 \qquad etc...$$

Elles permettent d'effectuer les changements de notations suivants.

Soit par exemple la récurrence d'ordre trois :

$$C_{k+3} + kC_{k+2} - C_{k+1} + k^2 C_k = 0$$

On peut la réécrire sous la forme équivalente :

$$(E^3 + kE^2 - E + k^2)C_k = 0 \qquad \text{(I-1)}$$

ou encore, sous cette autre forme, dite aux différences finies, d'ordre trois :

$$\Delta^3 C_k + (k+3)\Delta^2 C_k + (2k+2)\Delta C_k + (k^2+k)C_k = 0 \qquad \text{(I-2)}$$

Les écritures (I-1) et (I-2) sont équivalentes. L'écriture (I-2) paraît avoir l'avantage de simuler un parallélisme plus étroit avec la théorie des équations différentielles, l'opérateur Δ prenant la place de l'opérateur de dérivation D. Nous verrons au §I-1-1 qu'il est pourtant préférable de s'en tenir à la forme (I-1).

L'intérêt majeur des récurrences provient du fait qu'elles sont facilement programmées sur ordinateur. Alors qu'il est plutôt rare de considérer des équations différentielles d'ordre supérieur à deux, nous verrons que les récurrences d'ordre plus élevé sont d'un usage courant. Dans cette étude, nous passerons en revue les récurrences linéaires à coefficients constants et variables. Par contre nous passerons sous silence les récurrences non linéaires qui sont nettement plus difficiles à traiter et au sujet desquelles il n'existe que très peu de résultats connus utilisables.

I-1. Récurrence linéaire d'ordre n.

Elle s'écrit sous la forme générale suivante:

$$A_k^{(n)} C_{k+1} + A_k^{(n-1)} C_k + \cdots + A_k^{(0)} C_{k-n+1} = h_k \qquad \text{(I-3)}$$

D'ordre n, elle contient n+1 termes plus, éventuellement, un second membre, h_k, indépendant des C_k. Ses coefficients peuvent, en général, dépendre de k. On peut montrer que les résultats établis à propos des équations différentielles se transposent sans difficulté. En particulier on peut montrer que :

- cette équation possède n solutions linéairement indépendantes $f_i(k)=C_k^{(i)}$ (i=1,2,...,n). On contrôle l'indépendance linéaire de ces n solutions en vérifiant que le déterminant Casoratien des $f_i(k) = C_k^{(i)}$ est différent de zéro :

$$D[f_1 \ldots f_n] = \begin{vmatrix} f_1(k) & f_2(k) & \cdots & f_n(k) \\ f_1(k+1) & f_2(k+1) & \cdots & f_n(k+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(k+n-1) & f_2(k+n-1) & \cdots & f_n(k+n-1) \end{vmatrix} \neq 0$$

L'analogie avec la théorie du Wronskien, valable à propos des équations différentielles, est mieux mise en évidence si on recourt à la forme équivalente suivante :

$$D[f_1 \dots f_n] = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ \Delta f_1 & \Delta f_2 & \cdots & \Delta f_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta^{n-1} f_1 & \Delta^{n-1} f_2 & \cdots & \Delta^{n-1} f_n \end{vmatrix}$$

- la solution générale de l'équation homogène est la combinaison linéaire des n solutions de base.
- la solution générale de l'équation avec second membre s'écrit comme la superposition de la solution générale de l'équation homogène plus une solution particulière de l'équation avec second membre : $C_k = \lambda_1 C_k^{(1)} + \dots + \lambda_n C_k^{(n)} + sol.part.\ \ \varphi_k$.
- on détermine la solution de façon unique en imposant un jeu de n conditions initiales (ou aux limites), par exemple en fixant les valeurs de C_0, C_1,..., C_{n-1} ce qui permet de déterminer la valeur des coefficients λ_i.

Le cas où les coefficients de la récurrence sont constants est particulièrement important car il autorise une solution exacte de la récurrence.

I-1.1. Récurrence linéaire homogène à coefficients constants.

La récurrence linéaire homogène à coefficients constants s'écrit:

$$A^{(n)} C_{k+1} + A^{(n-1)} C_k + \cdots + A^{(0)} C_{k-n+1} = 0 \qquad \text{(I-4)}$$

On peut montrer que l'équation (I-4) possède des solutions exactes qui s'écrivent sous la forme d'exponentielles-polynômes. Commençons par rechercher les solutions qui s'écrivent sous la forme d'exponentielles pures de la forme $C_k=z^k$ où z est une constante à déterminer. Introduisant cette forme dans l'équation (I-4), on trouve de suite l 'équation polynomiale caractéristique dont les racines livrent les valeurs permises pour z :

$$A^{(n)} z^n + A^{(n-1)} z^{n-1} + \cdots + A^{(1)} z + A^{(0)} = 0$$

Ses racines, réelles ou complexes, se notent z_1,...,z_n.
Lorsque ces racines sont toutes distinctes, on a manifestement trouvé les solutions cherchées sous la forme :

$$C_k^{(i)} = z_i^k \qquad (i = 1,\dots,n)$$

Elles sont certainement linéairement indépendantes car leur Casoratien se réduit à un déterminant de Vandermonde, non nul :

$$D=\begin{vmatrix} z_1^k & \cdots & z_n^k \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^{k+n-1} & \cdots & z_n^{k+n-1} \end{vmatrix} = z_1^k \dots z_n^k \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & \cdots & z_n \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^{n-1} & \cdots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = z_1^k \dots z_n^k \prod_{i<j} (z_j - z_i) \neq 0$$

La solution générale s'écrit alors sous la forme :

$$C_k = \lambda_1 z_1^k + \cdots + \lambda_n z_n^k$$

où les coefficients λ_i dépendent des conditions initiales.
Lorsque deux ou plusieurs racines sont confondues, on montre qu'une racine de multiplicité μ donne naissance à μ solutions indépendantes qui s'écrivent sous la forme :

$$z^k k^w \qquad avec \quad w = 0,1,\dots,\mu - 1$$

<u>Exemple 1</u> : Pour fixer les idées, résolvons la récurrence suivante :

$$C_{k+1} - 5C_k + 8C_{k-1} - 4C_{k-2} = 0$$

L'équation caractéristique s'écrit : $z^3 - 5z^2 + 8z - 4 = 0$.

Ses racines valent :

$$z_1 = 2 \quad (double) \rightarrow \begin{cases} C_k^{(1)} = k2^k \\ C_k^{(2)} = 2^k \end{cases}$$

$$z_2 = 1 \quad (simple) \rightarrow \quad C_k^{(3)} = 1^k = 1$$

On vérifie facilement que les 3 solutions trouvées satisfont la récurrence. La solution générale s'écrit donc sous la forme :

$$C_k = \lambda + \mu 2^k + \nu k 2^k$$

Les coefficients λ, μ et ν dépendent des conditions initiales. Par exemple, si on impose :
$C_0 = 1$, $C_1 = 3$ et $C_2 = -1$, on écrit le système :

$$\begin{cases} C_0 = \lambda + \mu = 1 \\ C_1 = \lambda + 2\mu + 2\nu = 3 \\ C_2 = \lambda + 4\mu + 8\nu = -1 \end{cases}$$

qui se résout en : $\lambda = -9$, $\mu = 10$ et $\nu = -4$.

Exemple 2 : cet autre exemple montre ce qui se passe lorsque les racines sont complexes.
Soit à résoudre :

$$C_{k+1} - 2C_k + 2C_{k-1} = 0$$

L'équation caractéristique s'écrit :
$z^2 - 2z + 2 = 0$, dont les racines, simples, valent: $z_{1,2} = 1 \pm i$ (simples).
La solution générale de la récurrence peut s'écrire sous la forme:

$$C_k = \lambda(1+i)^k + \mu(1-i)^k$$

On peut lui substituer une forme équivalente qui élude la notation complexe. En effet, on a:

$$1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\pi/4} \quad \text{d'où:}$$

$$C_k = \lambda\sqrt{2}^k e^{ik\pi/4} + \mu\sqrt{2}^k e^{-ik\pi/4}$$

soit encore, en groupant les termes autrement :

$$C_k = \lambda'\sqrt{2}^k \cos\tfrac{k\pi}{4} + \mu'\sqrt{2}^k \sin\tfrac{k\pi}{4}$$

Si les conditions initiales imposées par le problème sont, par exemple : $C_{-1}=0$ et $C_0=1$, on trouve facilement :

$$C_{-1} = (\lambda'/\sqrt{2})\cos\tfrac{\pi}{4} - (\mu'/\sqrt{2})\sin\tfrac{\pi}{4} = 0 \qquad d'où : \qquad \lambda' = \mu'$$
$$C_0 = \lambda' = 1$$

d'où : $C_k = \sqrt{2}^k(\cos\tfrac{k\pi}{4} + \sin\tfrac{k\pi}{4})$

soit la suite : $C_{-1} = 0$; $C_0 = 1$; $C_1 = 2$; $C_2 = 2$; $C_3 = 0$; $C_4 = -4$; ...
qui résout le problème posé. Cette forme exacte permet le calcul de C_{100} , par exemple, sans avoir à itérer la récurrence.

I-1.2. Récurrence linéaire à coefficients constants avec second membre.

Lorsqu'on adjoint un second membre à la récurrence (I-4), elle cesse d'être homogène. Il convient donc d'ajouter à la solution générale de l'équation sans second membre, une solution particulière de l'équation complète. Cela peut se faire par la méthode de variation des constantes, habituelle en théorie des équations différentielles. Nous n'insistons pas sur ce point. Toutefois si le second membre est une exponentielle polynôme du type $\mathbb{Z}^k \mathbb{P}_m(k)$, une solution particulière φ_k possède la forme : $\mathbb{Z}^k Pol_m(k)k^\alpha$, où α est la multiplicité de $\mathbb{Z}$ comme racine de l'équation caractéristique de la récurrence homogène.

<u>Exemple</u> : Nous avons appliqué cette méthode à la récurrence suivante, présentant trois seconds membres distincts. Nous avons trouvé successivement :

$$C_{k+1} - 5C_k + 8C_{k-1} - 4C_{k-2} = \begin{cases} k^2+1 & \Rightarrow \varphi_k = k(\alpha k^2 + \beta k + \gamma) \\ (-1)^k(k^2+1) & \Rightarrow \varphi_k = (-1)^k(\alpha k^2 + \beta k + \gamma) \\ 2^k(k^2+1) & \Rightarrow \varphi_k = 2^k k^2(\alpha k^2 + \beta k + \gamma) \end{cases}$$

Dans chacun des trois cas envisagés, il reste à substituer la forme trouvée pour φ_k dans la récurrence inhomogène afin de trouver la valeur des coefficients α,β et γ qui conviennent.

I-1.3. Récurrence linéaire à coefficients variables.

Lorsque les coefficients de la récurrence sont variables avec k, les choses se compliquent singulièrement. Il n'est, en général, plus possible de trouver une solution exacte à la récurrence, même homogène :

$$A_k^{(n)}C_{k+1} + A_k^{(n-1)}C_k + \cdots + A_k^{(0)}C_{k-n+1} = 0 \qquad \text{(I-5)}$$

Seul le cas de la récurrence d'ordre 1 est soluble exactement. En effet, on a :

$$A_k^{(1)}C_{k+1} + A_k^{(0)}C_k = h_k \qquad \text{(I-6)}$$

L'équation homogène se réécrit :

$$C_{k+1} = -\left[A_k^{(0)} / A_k^{(1)}\right]C_k$$

que l'on peut sommer exactement sous la forme :

$$C_{k+1} = (-1)^{k+1} C_0 \prod_{i=0}^{k} \left[A_i^{(0)} / A_i^{(1)}\right]$$

Reste à trouver une solution particulière de l'équation complète. On vérifie sans peine que la forme suivante convient :

$$\varphi_{k+1} = (-1)^k \prod_{i=0}^{k} \left[A_i^{(0)} / A_i^{(1)}\right] \sum_{\ell=0}^{k} \frac{(-1)^\ell h_\ell}{A_\ell^{(1)} \prod_0^\ell \left[A_i^{(0)} / A_i^{(1)}\right]}$$

La solution générale de l'équation (I-6) s'obtient en combinant les deux expressions trouvées:

$$C_{k+1} = (-1)^{k+1} \prod_{i=0}^{k} \left[A_i^{(0)} / A_i^{(1)} \right] \left\{ C_0 - \sum_{\ell=0}^{k} \frac{(-1)^{\ell} h_{\ell}}{A_{\ell}^{(1)} \prod_{0}^{\ell} \left[A_i^{(0)} / A_i^{(1)} \right]} \right\}$$

Elle contient évidemment une constante arbitraire C_0 qui est la valeur initiale de C_k en k = 0.

<u>Remarque</u> : En posant k = -1 dans l'expression de la solution générale, on retrouve bien la valeur initiale C_0 à condition de poser conventionnellement : $\sum_{\ell=0}^{-1} = 0$ *et* $\prod_{i=0}^{-1} = 1$.

<u>Exemple</u> : soit à résoudre la récurrence :

$$C_{k+1} + (k+1) C_k = k$$

On trouve la solution générale :

$$C_{k+1} = (-1)^{k+1} (k+1)! \left[C_0 - \sum_{\ell=0}^{k} \frac{(-1)^{\ell} \ell}{(\ell+1)!} \right]$$

Dans les cas où aucune solution exacte n'est connue, on est amené à rechercher la solution par voie numérique ce qui soulève un certain nombre de problèmes que nous allons étudier.

<u>I-2. Comportement asymptotique des solutions d'une récurrence.</u>

Considérons la récurrence homogène à coefficients variables (I-5). Elle possède n solutions linéairement indépendantes que nous noterons $C_k^{(1)}$, $C_k^{(2)}$, ..., $C_k^{(n)}$, prises dans un ordre que nous préciserons ultérieurement. Il n'est généralement pas possible de trouver une forme exacte pour les $C_k^{(i)}$. Toutefois, on verra qu'on peut, dans un grand nombre de cas, déterminer leur comportement asymptotique $as^{(i)}(k)$ défini de telle manière que :
$\lim C_k^{(i)}/as^{(i)}(k)$ = constante, pour k tendant vers l'infini et pour tout i = 1, ..., n.

La récurrence (I-5) étant linéaire, toute combinaison linéaire de ces n solutions est encore solution de (I-5). Au total, la récurrence possède une n-uple infinité de solutions, toutes de la forme :

$$\lambda_1 C_k^{(1)} + ... + \lambda_n C_k^{(n)} .$$

Le point fondamental est le suivant : toutes ces solutions ne possèdent pas nécessairement le même comportement asymptotique. En fait, il y a, au plus, n asymptotes différentes. Nous appellerons système fondamental de solutions $C_k^{(1)}$, $C_k^{(2)}$, ..., $C_k^{(n)}$ un ensemble de n solutions linéairement indépendantes tel que le produit de leurs asymptotes sera de croissance minimum lorsque k tend vers l'infini. La numérotation des asymptotes se fait conventionnellement dans l'ordre des dominances décroissantes. Symboliquement, on note:

$as^{(1)}(k) \geq as^{(2)}(k) \geq ... \geq as^{(n)}(k)$

Lorsque deux asymptotes appartenant au système fondamental ne sont pas contrastées en module, elles le sont obligatoirement en phase. Le signe = note symboliquement ce cas.

La solution $C_k^{(1)}$, d'asymptote $as^{(1)}(k)$, est dite dominante;
la solution $C_k^{(n)}$, d'asymptote $as^{(n)}(k)$, est dite dominée;
les autres solutions $C_k^{(2)}$, ..., $C_k^{(n-1)}$ sont dites intermédiaires, avec $C_k^{(j)}$ qui ne domine jamais $C_k^{(i)}$ lorsque i>j.

On définit (n-1) facteurs de contraste entre solutions contiguës $C_k^{(i)}$ et $C_k^{(i+1)}$:

$\rho_k^{(i)} = C_k^{(i+1)}/C_k^{(i)}$ pour i = 1, 2, ..., n-1.

Lorsque $k \to \infty$, les $\rho_k^{(i)}$ ne tendent vers zéro que si les solutions $C_k^{(i)}$ et $C_k^{(i+1)}$ sont contrastées en module.

Pour clarifier ces notions, nous reprenons l'exemple de la récurrence, déjà envisagée:

$$C_{k+1} - 5C_k + 8C_{k-1} - 4C_{k-2} = 0$$

Sa solution générale s'écrit sous la forme :

$$C_k = \lambda + \mu 2^k + \nu k 2^k \tag{I-7}$$

Les trois solutions contrastées sont manifestement dans l'ordre des dominances décroissantes :

$$C_k^{(1)} = k2^k$$
$$C_k^{(2)} = 2^k$$
$$C_k^{(3)} = 1$$

Les contrastes valent respectivement 1/k et 2^{-k}. Dans ce cas très simple, les asymptotes coïncident avec les solutions exactes mais cela cesse d'être le cas lorsque la récurrence n'est plus à coefficients constants.

La solution générale (I-7) possède un comportement dominant dès que $\nu \neq 0$ et un comportement sous-dominant dès que $\nu = 0$. Pour y voir plus clair, déterminons les coefficients λ, μ et ν en fonction des conditions initiales.

On écrit par exemple :

$$\begin{cases} C_0 = \lambda + \mu \\ C_{-1} = \lambda + \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu \\ C_{-2} = \lambda + \frac{1}{4}\mu - \frac{1}{2}\nu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = C_0 - 4C_{-1} + 4C_{-2} \\ \mu = 4C_{-1} - 4C_{-2} \\ \nu = 2C_0 - 6C_{-1} + 4C_{-2} \end{cases}$$

- Toutes les solutions dominées sont caractérisées par ν=0 et μ=0. Elles exigent que l'on ait: C_0=C_{-1}=C_{-2}. Il y a donc une simple infinité de solutions dominées, toutes proportionnelles entre elles.
- Les solutions intermédiaires correspondent à ν=0 et $\mu \neq 0$ d'où on tire :
$2C_0$-$6C_{-1}$+$4C_{-2}$=0 et $C_{-1} \neq C_{-2}$. Il y a donc une double infinité de solutions intermédiaires.

- Les autres solutions, caractérisées par $\nu \neq 0$, sont dominantes. Il y en a une triple infinité.

Il est clair que si l'on choisit les conditions initiales au hasard, on a toutes les chances d'engendrer une solution dominante. Autrement dit, les solutions dominées sont beaucoup plus « rares » que les autres. Il faut savoir que dans un grand nombre d'applications physiques, ce sont précisément les solutions dominées qui sont importantes du fait de leur comportement asymptotique privilégié.

Un problème similaire se présente, en physique, lorsqu'on résout l'équation différentielle de Schrödinger: ψ''+(E-V)ψ=0 . Etant du second ordre, elle possède deux solutions linéairement indépendantes ψ_1 et ψ_2 qui possèdent des comportements asymptotiques différents aux grandes valeurs de x. Précisément, la solution physiquement acceptable est celle qui décroît le plus vite à l'infini : c'est la solution dominée (cfr §V-4 pour un exemple).

On formule la généralisation de ces résultats de la manière suivante. Revenons, pour ce faire, à la récurrence (I-5) de solution générale : $C_k = \lambda_1 C_k^{(1)} + \lambda_2 C_k^{(2)} + ...+ \lambda_n C_k^{(n)}$.
Cette solution possède un comportement asymptotique dominant $as^1(k)$ si $\lambda_1 \neq 0$. Si λ_1=0 et $\lambda_2 \neq 0$, elle possède le comportement asymptotique sous-dominant $as^{(2)}(k)$. Si λ_1=λ_2=0 et $\lambda_3 \neq 0$, etc... . Il existe donc une n-uple infinité de solutions dominantes possédant l'asymptote $as^{(1)}(k)$, une (n-1)-uple infinité de solutions d'asymptote $as^{(2)}(k)$, ...enfin une simple infinité de solutions dominées d'asymptote $as^{(n)}(k)$, d'ailleurs toutes identiques entre elles à une constante multiplicative près.

Il est possible d'exprimer ces considérations autrement encore : pour engendrer de façon récurrente une solution particulière de (I-5), il faut partir de n conditions initiales; disons qu'il faut se donner C_0,C_{-1}, ...,C_{1-n}.
- Si on veut engendrer une solution dominée $C_k^{(n)}$, il n'est pas question de choisir ces valeurs arbitrairement. Seul C_0 peut être quelconque mais une fois qu'il est fixé, C_{-1}, ..., C_{1-n} sont imposés. Nous verrons plus loin, un procédé numérique permettant de les déterminer.
- Si l'on veut construire une solution du type $C_k^{(n-1)}$ qui est dominée par toutes les autres sauf par $C_k^{(n)}$ qu'elle domine, il est possible de choisir C_0 et C_{-1} arbitrairement tandis que C_{-2}, ..., C_{1-n} ne peuvent pas prendre de valeurs arbitraires. Parmi toutes les valeurs que C_{-1} peut prendre, on exclura cependant celle qui engendre une solution dominée $C_k^{(n)}$.
- Et ainsi de suite pour toutes les solutions intermédiaires.

- Enfin, si l'on veut construire une solution dominante $C_k^{(1)}$, on peut partir de conditions initiales arbitraires sauf qu'il faut prendre soin que n'existe pas entre elles une des relations qui caractérise les solutions dominées.

Les deux exemples qui suivent illustrent la notion de contraste dans deux cas où les solutions exactes de la récurrence ne sont pas connues. Elles sont contrastées en amplitude dans le premier exemple et en phase dans le deuxième exemple.

<u>Exemple 1</u> : soit la récurrence d'ordre 3 :

$$(k^2-2k+4)C_{k+1}-3k^2C_k+(3k^2+2k)C_{k-1}-(k^2+1)C_{k-2}=0$$

Elle possède un système fondamental de solutions asymptotiques à (pour $k\to\infty$):

$$C_k^{(1)} \approx k^{11/8}\exp(4\sqrt{k}) = as^{(1)}(k) \qquad \Rightarrow \text{solution dominante}$$
$$C_k^{(2)} \approx k^{3/4} = as^{(2)}(k) \qquad \Rightarrow \text{solution intermédiaire}$$
$$C_k^{(3)} \approx k^{11/8}\exp(-4\sqrt{k}) = as^{(3)}(k) \qquad \Rightarrow \text{solution dominée}$$

On verra plus loin comment obtenir ces comportements asymptotiques. Les solutions sont contrastées en module. Les facteurs de contraste valent respectivement:

$$\rho_k^{(1)} = k^{-5/8}\exp(-4\sqrt{k})$$
$$\rho_k^{(2)} = k^{5/8}\exp(-4\sqrt{k})$$

<u>Exemple 2</u> : soit la récurrence d'ordre 2 :

$$(k+2)C_{k+1}-(2k+1)C_k+kC_{k-1}=0$$

Elle possède un système fondamental de solutions asymptotiques à (pour $k\to\infty$) :

$$C_k^{(1)} \approx k^{-3/4}\exp(2i\sqrt{k}) \qquad \Rightarrow \left|as^{(1)}(k)\right| = k^{-3/4}$$
$$C_k^{(2)} \approx k^{-3/4}\exp(-2i\sqrt{k}) \qquad \Rightarrow \left|as^{(2)}(k)\right| = k^{-3/4}$$

Ces deux solutions ne sont pas contrastées en module et leur numérotation peut, de ce fait, être inversée. Aucune combinaison linéaire ne peut évidemment faire apparaître de contraste. Toutefois il existe un contraste de phase qui vaut $\exp(-4i\sqrt{k})$. La notion de contraste est essentielle dans la discussion de l'instabilité numérique des calculs récursifs.

I-3. Instabilité numérique des calculs récursifs.

L'informatisation d'un algorithme récursif peut réserver de fâcheuses surprises. Le lecteur curieux peut procéder à l'expérience numérique suivante, facile à mettre en oeuvre. On programme, en arithmétique flottante, dans le mode progressif, la récurrence que voici:

$$C_{k+1} - 5C_k + 8C_{k-1} - 4C_{k-2} = 0 \qquad (k = 0,1,...,100)$$

en partant de deux ensembles de conditions initiales apparemment similaires:

- 1er cas: $C_{-2}=C_{-1}=C_0=1$ (ou 1/2)
- 2ème cas: $C_{-2}=C_{-1}=C_0=1/3$ (ou 1/7)

Dans les deux cas, on devrait trouver que la suite C_k reste constante à sa valeur initiale. En pratique, on constate que ce n'est effectivement vrai que dans le premier cas où l'encodage binaire des conditions initiales est exact. Dans le deuxième cas, une erreur se propage et s'amplifie de façon dramatique dans le calcul.
Le programme Mathematica suivant fait quelque chose de similaire en travaillant sur des conditions initiales exactes ou approchées.

```
co[k_]:=co[k]=5 co[k-1]-8 co[k-2]+4 co[k-3]
{co[0]=1/7;co[1]=1/7;co[2]=1/7};
Table[co[i],{i,0,9}]
```

{1/7,1/7,1/7,1/7,1/7,1/7,1/7,1/7,1/7,1/7}

```
Clear[co]
co[k_]:=co[k]=5 co[k-1]-8 co[k-2]+4 co[k-3]
{co[0]=N[1/7,6];co[1]=N[1/7,6];co[2]=N[1/7,6]};
Table[N[co[i],6],{i,10}]
```

{0.142857,0.142857,0.14286,0.1429,0.1429,0.143,0.14,0.1,$0.\times10^{-1}$,$0.\times10^{-1}$}

On observe un phénomène de pollution progressive des résultats.
Pour élucider ce phénomène, nous étudions l'exemple similaire de la tabulation de la fonction de Bessel $J_n(x)$. Le problème se pose de la façon suivante : on désire publier une table de la fonction $J_n(x)$ pour diverses valeurs de la variable x (dans ce qui suit, on se limitera à la valeur x=1) et pour n = 0, 1, 2, ..., 10. On sait qu'entre les J_n d'indices n successifs, il existe une relation récurrente d'ordre deux que l'on compte mettre à profit pour calculer J_2, J_3, J_4, ..., J_{10} une fois connues les valeurs de J_0 et J_1. Celles-ci doivent faire l'objet d'un calcul préalable par une méthode quelconque.

Cette récurrence s'écrit :

$$J_{n+1} - \frac{2n}{x} J_n + J_{n-1} = 0 \qquad \text{(I-8)}$$

Concrètement, on injecte les valeurs J_0 et J_1, calculées initialement avec m chiffres significatifs, dans la récurrence (I-8) et on espère que les valeurs suivantes J_2, J_3, ... sortiront avec m chiffres exacts. Par exemple pour x=1, on a avec huit chiffres corrects :
$J_0(1) = 0.76519768...$ et $J_1(1) = 0.44005058...$
La récurrence (I-8) appliquée progressivement à ces conditions initiales fournit les valeurs C_n qui sont consignées dans la Table I-1, que l'on comparera aux valeurs exactes $J_n(1)$.

n	**$J_n(1)$**	**C_n**
0	7.6519768E-01	7.6519768E-01
1	4.4005058E-01	4.4005058E-01
2	1.1490348E-01	1.1490348E-01
3	1.9563354E-02	1.9563340E-02
4	2.4766389E-03	2.476560E-03
5	2.4975773E-04	2.49140E-04
6	2.0938338E-05	1.4840E-05
7	1.5023258E-06	-7.106E-05
8	9.4223441E-08	-1.00E-03

Table I-1.

On constate une forte dégradation des résultats à mesure que n augmente. C'est un exemple de pollution catastrophique des résultats qui est typique des calculs récursifs mal maîtrisés. Cette pollution n'a rien à voir avec la classique propagation des erreurs d'arrondis, inhérente à tout calcul numérique, mais qui ne présente jamais un caractère aussi dramatique.
Pour étudier de plus près les causes profondes de ce type d'instabilité numérique, nous partons de la récurrence (I-8) qui a servi de base à notre exemple :

$$C_{n+1} - \frac{2n}{x} C_n + C_{n-1} = 0 \qquad \text{(I-9)}$$

Etant d'ordre deux, cette récurrence possède deux solutions linéairement indépendantes, à savoir les fonctions de Bessel de première et deuxième espèce J_n (x) et $Y_n(x)$. Sa solution générale s'écrit donc :

$$C_n = \lambda J_n(x) + \mu Y_n(x)$$

Les coefficients λ et μ se déterminent d'après les conditions initiales imposées. Du fait que l'on a choisi $C_0=J_0$ et $C_1=J_1$, on s'attend à ce que $C_n=J_n$ pour tout n. Ce serait effectivement le cas si le calcul était mené rigoureusement en arithmétique infinie. Toutefois la réalité est très différente puisque l'ordinateur travaille toujours en précision limitée (8 chiffres dans notre exemple). Il en résulte que les conditions initiales réellement encodées sont un peu différentes de celles que l'on avait en vue. En réalité, elles s'écrivent :

$$C_0 = J_0(1-\varepsilon) = \lambda J_0 + \mu Y_0 \qquad et$$
$$C_1 = J_1(1-\eta) = \lambda J_1 + \mu Y_1$$

où ε et η représentent la précision des conditions initiales, soit ici $\varepsilon,\eta \approx 10^{-8}$ (des valeurs plus exactes sont $\varepsilon \approx 8.6\ 10^{-9}$ et $\eta \approx 1.3\ 10^{-8}$). En théorie λ devrait valoir 1 et μ devrait valoir 0. En réalité leurs valeurs encodées sont :

$$\lambda = 1 + \frac{\eta J_1 Y_0 - \varepsilon J_0 Y_1}{J_0 Y_1 - J_1 Y_0} \qquad et \qquad \mu = (\eta - \varepsilon)\frac{J_0 J_1}{J_1 Y_0 - J_0 Y_1}$$

Il en résulte que la solution, que ces conditions initiales légèrement perturbées engendrent, diffère de $C_n=J_n$ et qu'elle vaut, en réalité :

$$C_n = \left[1 + \frac{\eta J_1 Y_0 - \varepsilon J_0 Y_1}{J_0 Y_1 - J_1 Y_0}\right] J_n + (\eta - \varepsilon)\frac{J_0 J_1}{J_1 Y_0 - J_0 Y_1} Y_n$$

A première vue, on pourrait se montrer satisfait puisque cette expression ne semble différer de $C_n=J_n$ que par des termes de l'ordre de ε et de η, soit la précision des conditions initiales. Si on y regarde de plus près, on constate que cela est tout à fait faux car la solution Y_n domine très fortement J_n en sorte que lorsque n augmente, la solution dominante non désirée Y_n pollue progressivement et dramatiquement la solution dominée cherchée J_n. Ceci est dû à la différence de comportements asymptotiques de Y_n et de J_n. On verra plus loin comment déterminer les asymptotes d'une récurrence telle que (I-9); il suffit pour l'instant de savoir qu'elles s'écrivent respectivement :

$$Y_n \approx as^{(1)}(n) = (\tfrac{2}{x})^n \Gamma(n) \qquad (asymptote\ \ dominante)$$
$$J_n \approx as^{(2)}(n) = (\tfrac{x}{2})^n / \Gamma(n+1) \qquad (asymptote\ \ dominée)$$

Le contraste entre J_n et Y_n est saisissant; il vaut:

$$\rho_n \approx \frac{(x/2)^{2n}}{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}$$

C'est lui qui fixe le degré de pollution de J_n par Y_n : l'erreur absolue commise est de l'ordre de PY_n, où P est la précision de l'ordinateur (soit 10^{-8} dans l'exemple traité ci-dessous).

L'erreur relative s'en déduit : erreur relative ≈ P $|Y_n/J_n|$ = P/ρ_n
Pour x = 1, on trouve : erreur relative ≈ $n!(n-1)!10^{-8}/0.5^{2n}$ (I-10)

soit en pratique les ordres de grandeur suivants :

n	erreur relative
1	$4.\ 10^{-8}$
2	$3.2\ 10^{-7}$
3	$7.6\ 10^{-6}$
4	$3.6\ 10^{-4}$
5	$3.\ 10^{-2}$
6	3.5 !!

Table I-2

Comparant les valeurs de J_n et celles de C_n telles qu'elles figurent dans la table I-1, on remarque que la formule (I-10) prédit correctement l'ordre de grandeur de la catastrophe lorsque n est suffisamment grand. On y voit un premier intérêt de pouvoir déterminer les asymptotes d'une récurrence. On en découvrira un deuxième lors de l'étude de l'algorithme de Miller. L'exemple précédent révèle une propriété générale des récurrences linéaires, à savoir :

le calcul récursif progressif n'est stable que pour les solutions dominantes $C_k^{(1)}$ de la récurrence étudiée; il est instable pour toutes les solutions non dominantes $C_k^{(i)}$ (i>1) et l'erreur relative commise vaut à chaque pas de l'ordre de P$\left|C_k^{(1)}/C_k^{(i)}\right|$.

Autrement dit, les solutions non dominantes ne peuvent être calculées de façon stable par la procédure récursive progressive : elles sont en effet automatiquement polluées par la solution dominante, l'ordre de grandeur de la pollution étant donné par le facteur de contraste entre la solution cherchée et la solution dominante. Si ce contraste n'est pas trop sévère, on peut quand même envisager le calcul progressif avec une erreur modérée; s'il est sévère, on doit recourir à un algorithme spécial dû à Miller, que nous allons étudier.

I-4. Algorithme de Miller simple.

L'algorithme de Miller calcule de façon stable n+1 valeurs C_0, C_1, ..., C_n de la solution dominée d'une récurrence. L'idée est des plus simples: elle consiste à essayer la récurrence à rebours, donc dans le sens régressif, en sorte que la solution dominante devienne dominée et inversément. Deux questions se posent alors:

- A quelle valeur N de n faut-il démarrer le calcul régressif ?
- Quelles conditions initiales faut-il adopter pour C_N et C_{N+1} ?

Nous verrons plus loin comment répondre à la première question. En attendant contentons-nous de prendre N suffisamment grand, quitte à augmenter sa valeur par la suite pour mesurer la modification que cela entraîne sur les valeurs cherchées de C_0, C_1, ..., C_n.
Miller répond à la deuxième question en choisissant des conditions initiales arbitraires, par exemple $C_N=1$ et $C_{N+1}=0$! Cela implique qu'au début, l'algorithme calcule une combinaison linéaire arbitraire des solutions dominantes et dominées. Mais, très vite, la solution dominée va polluer toutes les autres au point qu'elle sera seule présente à l'arrivée pour peu qu'on ait choisi N suffisamment grand. Il suffit alors de renormaliser la suite trouvée en ajustant C_0 à la condition initiale imposée. Si le fait d'augmenter N modifie la suite C_n, C_{n-1}, ..., C_1, C_0 à la précision demandée, e^{-p}, c'est que N n'a pas été choisi suffisamment grand. En pratique, il faut choisir N tel que le contraste ρ entre les solutions dominantes et dominées satisfasse la relation suivante qui fixe N :

$$\rho_{N+1} / \rho_n = e^{-p}$$

Justifions ce qui vient d'être dit.

La solution générale de la récurrence (I-9) étudiée s'écrit sous la forme :

$$C_n = \lambda J_n + \mu Y_n$$

Considérons la solution particulière correspondant aux conditions particulières imposées par l'algorithme de Miller :

$$C_N = 1 = \lambda J_N + \mu Y_N$$
$$C_{N+1} = 0 = \lambda J_{N+1} + \mu Y_{N+1}$$

On en déduit les valeurs de λ et de μ :

$$\lambda = -\frac{Y_{N+1}}{Y_N J_{N+1} - Y_{N+1} J_N}$$
$$\mu = \frac{J_{N+1}}{Y_N J_{N+1} - Y_{N+1} J_N}$$

d'où on déduit la solution engendrée dans ces conditions :

$$C_n = \frac{- J_{N+1} Y_n + Y_{N+1} J_n}{- Y_N J_{N+1} + Y_{N+1} J_N}$$

expression que l'on modifie comme suit :

$$
\begin{aligned}
C_n &= \frac{Y_{N+1}}{J_N Y_{N+1} - Y_N J_{N+1}} \left(J_n - Y_n \frac{J_{N+1}}{Y_{N+1}} \right) \\
&= \frac{Y_{N+1}}{J_N Y_{N+1} - Y_N J_{N+1}} J_n \left(1 - \frac{Y_n}{J_n} \frac{J_{N+1}}{Y_{N+1}} \right) \\
&= \lambda J_n \left(1 - \frac{\rho_{N+1}}{\rho_n} \right)
\end{aligned}
$$

Si le contraste, ρ, est suffisant et que N est suffisamment grand par rapport à n, on voit que la méthode génère, aux basses valeurs de n, la suite J_n demandée à une constante multiplicative, λ, près que l'on détermine en se servant de la condition initiale $C_0 = J_0$ qui doit évidemment être donnée. On peut recommencer le même calcul en partant de conditions initiales quelconques pour C_N et C_{N+1} : les conclusions restent valables. Par cette méthode, J_n et, a fortiori J_0, J_1, ..., J_{n-1}, seront corrects à la précision P, à condition de choisir N tel que :

$$
\frac{\rho_{N+1}}{\rho_n} \approx P
$$

Revenons à l'exemple de la récurrence (I-9) de Bessel. Le calcul de J_n pour n = 0, 1, ..., 10 avec huit chiffres exacts, exige le recours à l'algorithme de Miller. Le facteur de contraste a été évalué à :

$$
\rho_n = \frac{1}{2^{2n}(n-1)!\,n!}
$$

On détermine la valeur de N à partir de laquelle l'algorithme de Miller doit démarrer en résolvant l'équation transcendante suivante :

$$
\frac{\rho_{N+1}}{\rho_n} = \frac{2^{2n}(n-1)!\,n!}{2^{2N+2}N!(N+1)!} = 10^{-8} \qquad \text{avec} \qquad n = 10
$$

On trouve N = 12. Il importe de bien voir que l'algorithme engendre la suite complète, normalisée à $C_0 = J_0$, soit :

$C_{13} = 0$, $C_{12} = *$, C_{11}, $\mathbf{C_{10}}$**,** $\mathbf{C_9}$**, ...,** $\mathbf{C_2}$**,** $\mathbf{C_1}$**,** $\mathbf{C_0 = J_0}$.

et que cette valeur de N est telle que C_{10} est tout juste correct avec 8 chiffres; les termes C_n précédents (n>10) sont d'autant moins précis que n est grand tandis que les termes C_n suivants (n<10) sont de précision croissante à mesure que n diminue.
Cela est visible dans la table I-3 qui liste les valeurs obtenues par cette procédure. Les chiffres en gras sont exacts.

n	$C_n J_0(1)/C_0$
13	0.000000000000000E+00
12	**4.99**1679516745441E-13
11	**1.19800**3084018906E-11
10	**2.6306151**05324847E-10
9	**5.249250179**809506E-09
8	**9.42234417260**3863E-08
7	**1.502325817436808**E-06
6	**2.093833800238928**E-05
5	**2.497577302112345**E-04
4	**2.476638964109956**E-03
3	**1.956335398266841**E-02
2	**1.149034849319005**E-01
1	**4.400505857449337**E-01
0	**7.651976865579670**E-01

Table I-3

Remarque : Cet algorithme présente une caractéristique tout à fait remarquable que l'on peut d'ailleurs observer sur l'exemple du calcul de J_n. Alors que le calcul progressif de J_n aurait nécessité la connaissance de deux conditions initiales, par exemple J_0 et J_1, le calcul régressif basé sur l'algorithme de Miller n'en nécessite plus qu'une seule : J_0 dans l'exemple choisi. En particulier, la valeur de $C_1 = J_1$ surgit tout naturellement de l'algorithme de Miller. En résumé, quand on calcule la solution dominée d'une récurrence par l'algorithme de Miller, une seule condition initiale suffit, ce qui est bien naturel puisque la solution dominée est unique à un facteur multiplicatif près. Théoriquement, on pourrait même imaginer se passer de toute condition initiale du fait que les fonctions J_n obéissent, comme d'ailleurs la plupart des fonctions transcendantes, à des formules sommatoires dont un exemple est donné par la relation :

$J_0(z)+2J_2(z)+2J_4(z)+\cdots=1/2$ quel que soit z.

La mise en pratique de cette remarque exige toutefois de prendre en compte la vitesse de convergence de cette série. A cet égard, la formule sommatoire suivante devrait être plus performante, vu le comportement asymptotique rapidement décroissant de J_n :

$$J_0^2(z)+2J_1^2(z)+2J_2^2(z)+\cdots=1$$

I-4.1 Application au calcul d'intégrales compliquées.

Soit à calculer les intégrales suivantes (n entier positif) :

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-t}t^{n-1/2}}{(t+1/2)^n}dt \qquad \text{(I-11)}$$

Analytiquement, seule I_0 se calcule aisément. On trouve classiquement :

$$I_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{t}} = 1$$

On peut montrer que les I_n obéissent à une récurrence d'ordre 2 :

$$nI_{n+1} - 2nI_n + (n-1/2)I_{n-1} = 0 \qquad \text{(I-12)}$$

La démonstration en est la suivante. On considère, simultanément, les familles d'intégrales I_n et J_n définies par les relations:

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-t}t^{n-1/2}}{(t+1/2)^n}dt \qquad et \qquad J_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-t}t^{n+1/2}}{(t+1/2)^n}dt$$

On commence par intégrer I_n par parties. On pose, pour cela :

$$u = \frac{e^{-t}}{(t+\frac{1}{2})^n} \Rightarrow du = -\frac{e^{-t}}{(t+\frac{1}{2})^n} - n\frac{e^{-t}}{(t+\frac{1}{2})^{n+1}}$$
$$dv = t^{n-1/2}dt \Rightarrow v = \frac{1}{n+1/2}t^{n+1/2}$$

On trouve :

$$I_n = \underbrace{uv\Big]_0^\infty}_{(=0)} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n+1/2}\left[\int_0^\infty \frac{e^{-t}t^{n+1/2}}{(t+1/2)^n}dt + n\int_0^\infty \frac{e^{-t}t^{n+1/2}}{(t+1/2)^{n+1}}dt\right]$$

d'où on tire :

$$(n+\frac{1}{2})I_n = J_n + nI_{n+1} \qquad \text{(I-13)}$$

Par ailleurs, on a aussi, en travaillant J_n :

$$J_n = \int_0^\infty \frac{e^{-t} t^{n+1/2} t}{(t+1/2)^n} dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t} t^{n-1/2}(t+1/2-1/2)}{(t+1/2)^n} dt$$
$$= \int_0^\infty \frac{e^{-t} t^{n-1/2}}{(t+1/2)^{n-1}} dt - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-t} t^{n-1/2}}{(t+1/2)^n} dt$$

qui se réduit à :

$$J_n = J_{n-1} - \frac{1}{2} I_n \qquad \text{(I-14)}$$

Eliminant J_n entre (I-13) et (I-14), on trouve la relation cherchée :

$$nI_{n+1} - 2nI_n + (n-1/2)I_{n-1} = 0$$

Accessoirement, on trouve, simultanément, la récurrence satisfaite par les J_n :

$$nJ_{n+1} - (2n+1)J_n + (n+1/2)J_{n-1} = 0$$

La récurrence satisfaite par la suite des I_n possède deux solutions linéairement indépendantes. On verra plus loin comment déterminer leurs asymptotes qui valent respectivement :

$$as^{(1)}(n) \approx e^{\sqrt{2n}} \qquad (\text{solution dominante})$$
$$as^{(2)}(n) \approx e^{-\sqrt{2n}} \qquad (\text{solution dominée})$$

Le contraste entre ces deux asymptotes vaut : $\rho_n = e^{-2\sqrt{2n}}$.

Il est donc assez fortement polluant (~ 7.6 10^3 pour n = 10), soit une perte de 4 chiffres significatifs si on calcule par erreur la solution dominée de façon progressive. Toute la question est donc de savoir si la suite I_n est solution dominante ou dominée de la récurrence (I-12). Le recours à l'algorithme de Miller s'avérera indispensable dans la deuxième éventualité. Précisément, on détermine le comportement asymptotique des intégrales I_n en posant dans leur définition (I-11) : $t = nu^2$ d'où : $dt = 2nu\, du$.

On trouve :

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-nu^2} n^{n-1/2} u^{2n-1} 2nu}{(nu^2+1/2)^n} du$$

Aux grandes valeurs de n, le dénominateur se comporte comme :

$$n^n u^{2n} (1 + \frac{1}{2nu^2})^n \approx n^n u^{2n} \exp(1/2u^2)$$

L'intégrale I_n est dès lors asymptotique à :

$$I_n \approx 2\sqrt{n/\pi}\int_0^\infty exp(-nu^2 - 1/2u^2)du \approx e^{-\sqrt{2n}}$$

où on a utilisé ce résultat connu : $\int_0^\infty exp(-ax^2 - b/x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}exp(-2\sqrt{ab})$

On observe que l'intégrale I_n se comporte effectivement comme une solution dominée de la récurrence (I-12), ce qui entraîne le recours obligé à l'algorithme de Miller. Supposons, pour fixer les idées, que l'on veuille calculer la suite I_0, I_1, ..., I_{10} avec 8 chiffres. Il faut démarrer le calcul régressif à partir de $I_N = 1$ et $I_{N+1} = 0$ (par exemple), avec N solution de l'équation transcendante suivante :

$$\frac{e^{-2\sqrt{2N+2}}}{e^{-2\sqrt{20}}} \approx 10^{-8} \qquad d'où \qquad N = 92\,.$$

En fin de calcul régressif, on renormalise toute la suite I_0, I_1, ..., I_{10} obtenue en la divisant par le facteur, I_0, qu'il faut pour que la condition initiale $I_0 = 1$ soit satisfaite.

<u>Remarques:</u>

1) Bien que la récurrence soit d'ordre 2, on a eu à considérer qu'une seule condition initiale, à savoir $I_0 = 1$; ceci était dû au fait que la suite cherchée était dominée. Si on l'avait trouvée dominante, deux conditions initiales, soit par exemple I_0 et I_1 , auraient été nécessaires et on n'aurait pas eu besoin de recourir à l'algorithme de Miller.

2) On peut tenter de bénéficier de la connaissance du comportement asymptotique de la solution dominée pour accélérer légèrement l'algorithme de Miller : il suffit de partir des conditions initiales suivantes, plus optimales pour des raisons évidentes :

$$C_N = as^{(2)}(N) \quad et \quad C_{N+1} = as^{(2)}(N+1)$$

Le gain en précision n'excède cependant guère un chiffre décimal en sorte que cette remarque est ignorée la plupart du temps.

1-5. Algorithme de Miller généralisé.

Le cas des récurrences d'ordre 2 est simple en ce qu'une solution dominante se calcule par le mode progressif tandis qu'une solution dominée se calcule par le mode régressif. Le cas des récurrences d'ordre supérieur à 2 est nettement plus complexe du fait de l'existence de solutions intermédiaires qui ne peuvent se calculer de façon stable dans aucun des deux modes. Il faut, pour les déterminer, recourir à un algorithme de portée plus générale que nous nous bornons à présenter sans démonstration. On procède comme suit : soit les n solutions de la récurrence rangées dans l'ordre des dominances décroissantes :
$C_k^{(1)} \geq C_k^{(2)} \geq ... \geq C_k^{(n)}$.

Devant déterminer de façon stable la solution $C_k^{(i)}$, on réécrit la récurrence sous la forme d'un système linéaire infini obtenu en posant successivement dans la récurrence : k = i - 1, i, i +1, ... Hors de ce système infini, on extrait le système tronqué K x K (K suffisamment grand) qui néglige les C_k d'indice k > K . En notation matricielle, cela donne :

$$\begin{pmatrix} A_{i-1}^{(n-i+1)} & \cdots & A_{i-1}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ A_n^{(0)} & \cdots & \ddots & \cdots & A_n^{(n)} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_{K-1}^{(0)} & \cdots & \ddots & \cdots & A_{K-1}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{K+i-2}^{(0)} & \cdots & A_{K+i-2}^{(n-i+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ C_K \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A_{i-1}^{(n-i)} C_0 + \cdots + A_{i-1}^{(0)} C_{i-n} \\ A_i^{(n-i-1)} C_0 + \cdots + A_i^{(0)} C_{i+1-n} \\ \vdots \\ A_{n-1}^{(0)} C_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les coefficients C_0, C_{-1}, ..., C_{i-n} qui figurent au second membre sont les conditions initiales qui, vu l'état de dominance de la solution que l'on a en vue, peuvent être choisies arbitrairement afin que le problème n'ait qu'une solution. Une fois ces valeurs décidées, il suffit de résoudre le système pour obtenir $C_1^{(i)}$, ..., $C_k^{(i)}$ de façon généralement stable. Si on augmente la valeur de K, les $C_k^{(i)}$ d'indice k petit tendent vers des valeurs fixes qui sont les valeurs cherchées. Naturellement, ce procédé ne donne correctement $C_k^{(i)}$ que pour k suffisamment petit devant K. Il est clair, en effet, que $C_K^{(i)}$ ne peut en aucun cas être correct puisque dans les dernières équations du système, on a ignoré des termes. En pratique, l'erreur relative commise sur $C_k^{(i)}$ vaut dans tous les cas où il existe un contraste entre les solutions $C_k^{(i)}$ et $C_k^{(i-1)}$:

précision sur $C_k^{(i)} \approx \dfrac{\rho_K^{(i-1)}}{\rho_k^{(i-1)}} = \dfrac{\left|C_K^{(i)}\right|}{\left|C_K^{(i-1)}\right|} \dfrac{\left|C_k^{(i-1)}\right|}{\left|C_k^{(i)}\right|}$ (i = 2, 3, ..., n).

Cette relation est utile en ce qu'elle permet d'estimer la dimension K du sous-système à résoudre pour obtenir $C_1^{(i)}$, ..., $C_k^{(i)}$ avec une précision donnée. L'erreur relative sur $C_k^{(1)}$ est évidemment nulle puisque l'algorithme de Miller généralisé est équivalent, dans ce cas, au calcul progressif qui est stable pour la solution dominante.

<u>Exemple 1</u>: soit la récurrence d'ordre trois déjà évoquée précédemment :

$$(k^2 - 2k + 4)C_{k+1} - 3k^2 C_k + (3k^2 + 2k)C_{k-1} - (k^2 + 1)C_{k-2} = 0$$

qui, rappelons-le, possède trois solutions linéairement indépendantes respectivement asymptotiques à :

$$C_k^{(1)} \approx k^{11/8} \exp(4\sqrt{k}\,) = as^{(1)}(k) \qquad \Rightarrow solution \quad dominante$$
$$C_k^{(2)} \approx k^{3/4} = as^{(2)}(k) \qquad \Rightarrow solution \quad intermédiaire$$
$$C_k^{(3)} \approx k^{11/8} \exp(-4\sqrt{k}\,) = as^{(3)}(k) \qquad \Rightarrow solution \quad dominée$$

Toute solution intermédiaire est du type $\mu C_k^{(2)} + \nu C_k^{(3)}$ et exige deux conditions initiales pour fixer μ et ν. Pour obtenir cette solution avec dix chiffres exacts dans le domaine k = 1, 2, ..., 50, il y a lieu de recourir à l'algorithme de Miller généralisé avec K fixé à la valeur, qui est solution de l'équation transcendante suivante :

$$10^{-10} \approx \rho_K^{(1)} / \rho_{50}^{(1)} = \frac{K^{-5/8} \exp(-4\sqrt{K}\,)}{50^{-5/8} \exp(-4\sqrt{50}\,)}$$

On trouve K = 160. Il faut donc résoudre un sous-système de dimension 160 pour obtenir $C_1^{(2)}$, ..., $C_{50}^{(2)}$ avec la précision de 10^{-10} exigée. En fait les $C_k^{(2)}$ tels que k < 50 sont corrects avec une précision meilleure que 10^{-10} tandis que les $C_k^{(2)}$ (avec k > 50) sont corrects avec une précision moindre.

<u>Exemple 2</u> : Reconsidérons la récurrence à coefficient constant, étudiée au §I-3 :

$$C_{k+1} - 9C_k + 26C_{k-1} - 24C_{k-2} = 0$$

Soit à déterminer numériquement les solutions suivantes :
- La solution dominante telle que : $C_{-2} = C_{-1} = C_0 = 1$.
Son expression exacte est : $C_k^{(1)} = 12\cdot 2^k - 27\cdot 3^k + 16\cdot 4^k$ d'où: $C_{10}^{(1)} = 15195181$.

- La solution intermédiaire telle que : $C_{-1} = C_0 = 1$.
Son expression exacte est : $C_k^{(2)} = 4\cdot 2^k - 3\cdot 3^k$ d'où: $C_{10}^{(2)} = -173051$.

- La solution dominée telle que $C_0 = 1$.
Son expression exacte est : $C_k^{(3)} = 2^k$ d'où: $C_{10}^{(3)} = 1024$.

Démarrant l'algorithme de Miller généralisé à K = 40, on trouve respectivement :

$C_{10}^{(1)} = 15195181$ (valeur exacte).
$C_{10}^{(2)} = -173029.26...$ (p = 9).
$C_{10}^{(3)} = 1023.993...$ (p = 11.9).

On vérifie sans peine que les précisions p obtenues sont compatibles avec le modèle théorique. En effet, les facteurs de contraste valent respectivement $(3/4)^k$ et $(2/3)^k$ et on a bien :

$e^{-p} \approx (3/4)^{K-k}$ d'où $p_{int} \approx (K-k) \ln(4/3) = 8.6$, pour la solution intermédiaire.
$e^{-p} \approx (2/3)^{K-k}$ d'où $p_{dominée} \approx (K-k) \ln(3/2) = 12.2$, pour la solution dominée.

L'algorithme de Miller simple ne fonctionnerait que pour la solution dominée avec le même indice de performance.
On voit sur ces exemples que la notion de contraste entre les solutions d'une récurrence est très importante car elle permet d'évaluer le degré de précision des algorithmes de Miller simple et généralisé. Encore faut-il pouvoir déterminer les comportements asymptotiques des solutions d'une récurrence. Ce point fait l'objet de l'étude des paragraphes suivants.
Avant cela, il reste un mot à dire des récurrences non homogènes. Le principe de la discussion dans ce cas un peu plus complexe est analogue: il faut connaître le comportement asymptotique de la solution particulière de l'équation avec second membre et le comparer à ceux des n solutions de l'équation homogène. L'algorithme de Miller doit alors être adapté en fonction des dominances observées. Nous n'en disons pas davantage ici du fait que nous ne rencontrerons pas ce cas dans la suite du cours. Le lecteur intéressé se rapportera à l'ouvrage fondamental de Wimp cité en référence.

Une alternative existe cependant : soit la récurrence inhomogène :

$$A_k^{(n)} C_{k+1} + ... + A_k^{(0)} C_{k-n+1} = h_k$$

en abrégé : $\mathtt{L}$ (C_k) = h(k) soit encore : $\mathtt{L}$ (C_k) / h(k) = 1

On a aussi : $\mathtt{L}$ (C_{k+1}) / h(k+1) = 1

On peut alors ramener le problème au calcul des solutions d'une équation homogène d'ordre supérieur d'une unité à celui de l'équation de départ :

$\mathtt{L}$ (C_{k+1}) / h(k+1) - $\mathtt{L}$ (C_k) / h(k) = 0.

I-6. Détermination des asymptotes d'une classe étendue de récurrences linéaires homogènes.

Il est effectivement possible de déterminer les asymptotes d'une classe assez vaste de récurrences du type (I-5) telles que leurs coefficients peuvent s'écrire sous la forme canonique générale:

$$A_k^{(j)} = \sum_{p=0}^{\infty} a_{j,p} k^{-p/r} \qquad \text{(I-15)}$$

où r est un entier fixé et où les $a_{j,0}$ ne sont pas tous simultanément nuls. Une telle récurrence est dite de Poincaré de type r. Le cas particulier r=1 est important car il regroupe les récurrences à coefficients rationnels sur la variable k. On a l'exemple suivant:

$$(k^2 + 1)C_{k+1} + (3k - 1)C_k + k^2 C_{k-1} = 0$$

d'une récurrence qui peut effectivement se réécrire sous la forme canonique de type un :

$$(1+\frac{1}{k^2})C_{k+1}+(\frac{3}{k}-\frac{1}{k^2})C_k+C_{k-1}=0 \qquad \text{(I-16)}$$

Une récurrence de Poincaré de type r est dite régulière si on a en plus que $a_{0,0}\neq 0$ et que $a_{n,0}\neq 0$. Elle est dite irrégulière dans le cas contraire. La récurrence (I-16) est régulière.

I-6.1. Asymptotes des récurrences régulières.

On appelle équation caractéristique de la récurrence régulière (I-5) l'équation algébrique :

$$a_{n,0}z^n+a_{n-1,0}z^{n-1}+\cdots+a_{0,0}=0$$

Vu que $a_{0,0} \neq 0$ et que $a_{n,0} \neq 0$, cette équation est polynomiale de degré n. Elle possède donc n racines, distinctes ou non, réelles ou complexes, peu importe. Dans le cas particulier où la récurrence est à coefficients constants, on retrouve l'équation caractéristique déjà étudiée et les solutions asymptotiques sont exactes dans ce cas. Plusieurs études, dues à Nörlund, Birkhoff, Culmer et Turrittin, ont montré que les asymptotes des n solutions linéairement indépendantes de la récurrence sont toutes du type :

$$as(k)=z^k k^w \exp\left[\alpha k^{\frac{m-1}{m}}+\beta k^{\frac{m-2}{m}}+\cdots+\eta k^{\frac{1}{m}}\right](\ln k)^g \qquad \text{(I-17)}$$

où m est un entier inférieur ou égal au produit rμ , μ étant la multiplicité de z comme solution de l'équation caractéristique, et où les constantes w, α, β, ..., η, g doivent être déterminées par le calcul. En théorie, on procède à cette détermination comme suit : on introduit l'asymptote (I-17) dans la récurrence et on développe tous les termes en puissances de $k^{-1/m}$. Ensuite, on identifie à zéro les coefficients des puissances de k des rangs les plus élevés, ce qui livre en général les relations qui permettent de déterminer les constantes w, α, β, ..., η, g. En pratique, on a effectué ces calculs lourds, une fois pour toutes, dans le plus grand nombre de cas possibles. Les tables I-4 en annexe livrent le résultat complet des calculs pour les récurrences régulières au sens de Poincaré du type un (racine z simple, double, triple ou quadruple) et des types deux, trois et quatre (racine z simple). Le mode d'emploi de ces tables est le suivant : soit la récurrence régulière (I-5) telle que ses coefficients revêtent tous la forme (I-15). On forme l'équation caractéristique possédant n racines :

$$a_{n,0}z^n+a_{n-1,0}z^{n-1}+\cdots+a_{0,0}=0$$

Chaque racine z est obtenue avec sa multiplicité μ. On peut alors modifier la récurrence en posant :

$C_k = z^k \gamma_k$.

On obtient une nouvelle récurrence en γ_k dont l'équation caractéristique possède obligatoirement une racine de multiplicité μ en z = 1. Les tables I-4 ne sont valables que lorsque cette opération préalable a été effectuée. En fait, elle doit être recommencée pour chaque racine z. Il suffit alors d'écrire directement l'asymptote en se conformant scrupuleusement aux branchements prévus dans les tableaux I-4.

Tous les résultats sont exprimés en termes des symboles σ(p,q) définis par :

$$\sigma(p,q) = \sum_{j=0}^{n} j^p a_{j,q}$$

(avec $0^0 = 1$ lorsque j et p sont simultanément nuls).

Exemple 1 : Considérons la récurrence régulière au sens de Poincaré, de type un :

$$(1-2k^{-1}+4k^{-2})C_{k+1} - 3C_k + (3+2k^{-1})C_{k-1} - (1+k^{-2})C_{k-2} = 0$$

$$\begin{array}{cccc} j=3 & j=2 & j=1 & j=0 \\ a_{3,0}=1 & a_{2,0}=-3 & a_{1,0}=3 & a_{0,0}=-1 \\ a_{3,1}=-2 & autres=0 & a_{1,1}=2 & a_{0,1}=0 \\ a_{3,2}=4 & & autres=0 & a_{0,2}=-1 \\ autres=0 & & & autres=0 \end{array}$$

L'équation caractéristique s'écrit : $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = 0$
dont la racine z = 1 est triple. On calcule sans peine :

$$\sigma(0,0)=\sigma(1,0)=\sigma(2,0)=0$$
$$\sigma(3,0)=6 \qquad \sigma(0,1)=0 \qquad \sigma(2,1)=-16$$
$$\sigma(4,0)=36 \qquad \sigma(1,1)=-4 \qquad \sigma(0,2)=3$$

Consultant les tables I-4, on trouve les asymptotes correspondant à ce cas sous la rubrique: type un, racine triple, avec $Q_2 = -5/2$. Les asymptotes valent :

$$C_k^{(1)} \approx k^{11/8} exp(4\sqrt{k})$$
$$C_k^{(2)} \approx k^{3/4}$$
$$C_k^{3} \approx k^{11/8} exp(-4\sqrt{k})$$

Exemple 2 : Pour bien fixer les idées, traitons encore cet exemple où une racine de l'équation caractéristique n'est pas égale à 1. Soit la récurrence régulière de type un :

$$C_{k+1} - (3 + \frac{2}{k})C_k + 2C_{k-1} = 0$$

$$\begin{array}{lll} j=2 & j=1 & j=0 \\ a_{2,0} = 1 & a_{1,0} = -3 & a_{0,0} = 2 \\ a_{2,1} = 0 & a_{1,1} = -2 & a_{0,1} = 0 \\ autres = 0 & autres = 0 & autres = 0 \end{array}$$

L'équation caractéristique s'écrit : $z^2 - 3z + 2 = 0$. Ses racines sont $z_1 = 1$ et $z_2 = 2$. L'asymptote qui correspond à $z_1 = 1$ se détermine immédiatement en consultant les tables I-4 à la rubrique type un, racine simple.
On trouve sans peine :

$$C_k \approx k^w \quad avec \quad w = -\sigma(0,1)/\sigma(1,0) = -(-2)/(-1) = -2$$

La détermination de l'autre asymptote, qui correspond à $z_2 = 2$, nécessite de poser préalablement $C_k = 2^k \gamma_k$. On cherche alors la récurrence satisfaite par γ_k.
On trouve sans difficulté :

$$2\gamma_{k+1} - (3 + \frac{2}{k})\gamma_k + \gamma_{k-1} = 0$$

$$\begin{array}{lll} j=2 & j=1 & j=0 \\ a_{2,0} = 2 & a_{1,0} = -3 & a_{0,0} = 1 \\ a_{2,1} = 0 & a_{1,1} = -2 & a_{0,1} = 0 \end{array}$$

d'où: $\sigma(0,1) = -2$ et $\sigma(1,0) = 1$.

Consultant les tables I-4, on trouve cette fois: $\gamma_k \approx k^2$ d'où: $C_k \approx 2^k k^2$.
La récurrence initiale possède donc deux solutions contrastées asymptotiques à :

$$C_k^{(1)} \approx 2^k k^2 \qquad (solution \; dominante) \qquad et$$
$$C_k^{(2)} \approx k^{-2} \qquad (solution \; dominée).$$

I-6.2. Asymptotes des récurrences irrégulières.

Dans les cas très nombreux où la récurrence n'est pas régulière au sens de Poincaré, soit que $a_{n,0}$ est nul ou que $a_{0,0}$ l'est (ou les deux), on procède comme suit. On commence par former l'équation caractéristique :

$$A_k^{(n)} z^n + A_k^{(n-1)} z^{n-1} + \cdots + A_k^{(0)} = 0$$

en ne retenant que le terme principal en k dans chacun des coefficients $A_k^{(j)}$, c'est-à-dire le permier terme $a_{j,p}k^{-p/r}$ non nul. Il est possible de montrer que l'équation caractéristique possède n racines de la forme approchée: $z \approx \rho\ k^{\tau}$ (k étant supposé très grand), de multiplicité ν .

Pour découvrir les ν asymptotes associées à chacune des racines revêtant cette forme, on pose: $C_k = \rho^k\ [\Gamma(k)]^{\tau}\ \gamma_k$, que l'on introduit dans la récurrence de départ. On obtient ainsi une nouvelle récurrence portant sur γ_k.

L'équation caractéristique de cette nouvelle récurrence possède nécessairement une racine de multiplicité ν en $z = 1$. Les asymptotes qui lui sont associées se calculent par la méthode décrite plus haut comme si la récurrence satisfaite par γ_k était régulière au sens de Poincaré. Son type dépend des valeurs trouvées pour τ.

Exemple 1 : Soit la récurrence :

$$qC_{k+1} + 4(k+1)^2 C_k + qC_{k-1} = 0$$

où q est une constante quelconque; cette récurrence intervient dans la théorie des fonctions de Mathieu. Elle n'est pas régulière. On forme son équation caractéristique :

$$qz^2 + 4k^2 z + q = 0$$

dont on cherche le comportement asymptotique des racines sous la forme : $z = \rho\ k^{\tau}$. On a donc:

$$q\rho^2 k^{2\tau} + 4\rho k^{\tau+2} + qk^0 = 0$$

- $2\tau = 0$ est impossible.
- $2\tau = \tau + 2$, d'où $\tau = 2$ est possible à condition de prendre : $\rho = -4/q$.
- $\tau + 2 = 0$, d'où $\tau = -2$ est possible à condition de prendre : $\rho = -q/4$.

Les racines cherchées sont donc asymptotiques à : $z_1 \approx -(4/q)k^2$ et $z_2 \approx -(q/4)k^{-2}$

Considérant z_1, on a: $\rho = -4/q$ et $\tau = 2$. On pose donc :

$$C_k = (-4/q)^k \left[\Gamma(k)\right]^2 \gamma_k$$

On trouve pour γ_k , la récurrence :

$$\gamma_{k+1} - (1+k^{-1})^2\gamma_k + \frac{q^2}{16}k^{-2}(k-1)^{-2}\gamma_{k-1} = 0$$

$$\begin{array}{lll} j=2 & j=1 & j=0 \\ a_{2,0}=1 & a_{1,0}=-1 & a_{0,0}=0 \\ a_{2,1}=0 & a_{1,1}=-2 & a_{0,1}=0 \\ a_{2,2}=0 & a_{1,2}=-1 & a_{0,2}=0 \end{array}$$

On détermine l'asymptote correspondante comme indiqué précédemment (cfr tables I-4, type un, racine simple), à savoir : $\gamma_k \approx k^2$, soit au total :

$$C_k^{(1)} \approx (-4/q)^k k!^2$$

Considérant l'autre racine z_2, on trouverait pour l'autre solution le comportement asymptotique suivant :

$$C_k^{(2)} \approx (-q/4)^k k!^{-2} k^{-2}$$

On note que la numérotation des solutions tient compte de ce que $C_k^{(1)}$ domine effectivement $C_k^{(2)}$.

<u>Exemple 2</u> : Considérons la récurrence de Bessel déjà envisagée précédemment :

$$C_{k+1} - \frac{2k}{x}C_k + C_{k-1} = 0$$

L'équation caractéristique s'écrit :

$$z^2 - \frac{2k}{x}z + 1 = 0$$

On pourrait trouver le comportement asymptotique de ses racines en procédant comme dans l'exemple précédent. On peut aussi résoudre l'équation du second degré et trouver :

$$z_{\substack{1\\2}} = \frac{k}{x} \pm \sqrt{\frac{k^2}{x^2} - 1}$$

Aux grandes valeurs de k, on trouve respectivement :

$z_1 \approx 2k/x$ soit : $\rho = 2/x$ et $\tau = 1$
$z_2 \approx x/(2k)$ soit : $\rho = x/2$ et $\tau = -1$.

Traitant séparément chaque racine, on trouve les asymptotes :

$C_k^{(1)} \approx (2/x)^k \Gamma(k) \qquad et \qquad C_k^{(2)} \approx (x/2)^k / \Gamma(k+1)$

Nous livrons, en annexe, le contenu des tables I-4 qui permettent de déterminer le comportement asymptotique des solutions d'une récurrence linéaire de Poincaré.

RECURRENCE DE POINCARE DU TYPE 1

Racine $z = 1$ *simple* : $\sigma(0,0) = 0$ et $\sigma(1,0) \neq 0$

	$\rightarrow C_k \sim k^w$	$w = -\sigma(0,1)/\sigma(1,0)$

Racine $z = 1$ *double* : $\sigma(0,0) = \sigma(1,0) = 0$ et $\sigma(2,0) \neq 0$

1. $\sigma(0,1) \neq 0$	$\rightarrow C_k \sim k^w \exp\,[\alpha\, k^{1/2}]$	$\alpha^2 = -8\,\sigma(0,1)/\sigma(2,0)$ $w = 1/4 - 1/24\,\alpha^2\sigma(3,0)/\sigma(2,0) - \sigma(1,1)/\sigma(2,0)$
2. $\sigma(0,1) = 0$	$\rightarrow C_k \sim k^w$	$1/2\, w(w-1)\,\sigma(2,0) + w\,\sigma(1,1) + \sigma(0,2) = 0$
Remarque : si $w_1 = w_2$	$\rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k$	

Racine $z = 1$ *triple* : $\sigma(0,0) = \sigma(1,0) = \sigma(2,0) = 0$ et $\sigma(3,0) \neq 0$

1. $\sigma(0,1) \neq 0$	$\rightarrow C_k \sim k^w \exp\,[\alpha\, k^{2/3} + \beta\, k^{1/3}]$	$\alpha^3 = -81/4\,\sigma(0,1)/\sigma(3,0)$ $\beta = -(1/\alpha)\,[9\,\sigma(1,1) + 1/9\alpha^3\sigma(4,0)]/\sigma(3,0)$ $w = 1/3 - Q_1/\sigma(3,0)$
2. $\sigma(0,1) = 0$		
2.1. $\sigma(1,1) \neq 0$	$\rightarrow C_k \sim k^w \exp\,[\alpha\, k^{1/2}]$	Soit : $\alpha = 0$, $w = -\sigma(0,2)/\sigma(1,1)$ ou : $\alpha^2 = -24\,\sigma(1,1)/\sigma(3,0)$, $w = 3/4 + Q_2/\sigma(1,1)$
2.2. $\sigma(1,1) = 0$		
2.2.1. $\sigma(0,2) \neq 0$	$\rightarrow C_k \sim k^w \exp\,[\beta\, k^{1/3}]$	$\beta^3 = -162\,\sigma(0,2)/\sigma(3,0)$ $w = 2/3 - \sigma(2,1)/\sigma(3,0)$
2.2.2. $\sigma(0,2) = 0$	$\rightarrow C_k \sim k^w$	$1/6w(w-1)\,(w-2)\sigma(3,0) + 1/2\,w(w-1)\sigma(2,1)$ $+ w\sigma(1,2) + \sigma(0,3) = 0$
Remarque : si $w_1 = w_2$	$\rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k$	
si $w_1 = w_2 = w_3$	$\rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k \sim C_k^{(3)} (\ln k)^2$	

Racine $z = 1$ *quadruple* : $\sigma(0,0) = \sigma(1,0) = \sigma(2,0) = \sigma(3,0) = 0$ et $\sigma(4,0) \neq 0$

1. $\sigma(0,1) \neq 0$	$\rightarrow C_k \sim k^w \exp\,[\alpha k^{3/4} + \beta k^{2/4} + \gamma k^{1/4}]$	$\alpha^4 = -(2048/27)\sigma(0,1)/\sigma(4,0)$ $\beta = -(1/\alpha^2)Q_3/\sigma(4,0)$ $\gamma = -(1/\alpha^3)Q_4/\sigma(4,0)$ $w = -(1/\alpha^3)Q_5/\sigma(4,0)$

2. $\sigma(0,1)=0$		
2.1. $\sigma(1,1)\neq 0$	$\to C_k \sim k^w \exp\,[\alpha k^{2/3}+\beta k^{1/3}]$	Soit : $\alpha=0$, $\beta=0$, $w=-\sigma(0,2)/\sigma(1,1)$ — ou : $\alpha^3=-81\sigma(1,1)/\sigma(4,0)$, $\beta=Q_6/\sigma(1,1)$, $w=1/3\,Q_{10}/\sigma(1,1)$
2.2. $\sigma(1,1)=0$		
Former l'équation	$1/384y^2\sigma(4,0)+1/8y\sigma(2,1)+\sigma(0,2)=0\to y=y_1,y_2$	
2.2.1. $y_1\neq y_2$	Pour chaque racine y_i, discuter :	
2.2.1.1. $y_i\neq 0\,[\sigma(0,2)\neq 0]$	$\to C_k\sim k^w\exp\,[\beta k^{1/2}]$	$\beta_i^2=y_i$, $w=-Q_7/[1/24\,\beta^2\sigma(4,0)+\sigma(2,1)]$
2.2.1.2. $y_i=0\,[\sigma(0,2)=0$ et $\sigma(2,1)\neq 0]$	$\to C_k\sim k^w$	$1/2\,(w^2-w)\,\sigma(2,1)+w\sigma(1,2)+\sigma(0,3)=0$
Remarque : si $w_1=w_2$	$\to C_k^{(1)}\sim C_k^{(2)}\ln k$	
2.2.2. $y_1=y_2$ $[1/24y\sigma(4,0)+\sigma(2,1)=0]$		
2.2.2.1. $\sigma(0,2)\neq 0$ et $Q_7\neq 0$	$\to C_k\sim k^w\exp\,[\beta k^{2/4}+\gamma k^{1/4}]$	$\beta^2=y_i$, $\gamma^2=8\beta Q_7/\sigma(2,1)$, $w=2Q_9/\sigma(2,1)$
2.2.2.2. $\sigma(0,2)\neq 0$ et $Q_7=0$	$\to C_k\sim k^w\exp\,[\beta k^{1/2}]$	$\beta^2=y_i$, $-(w^2-w)\sigma(2,1)+wQ_{11}+Q_{12}=0$
Remarque : si $w_1=w_2$	$\to C_k^{(1)}\sim C_k^{(2)}\ln k$	
2.2.2.3. $\sigma(0,2)=0$		
2.2.2.3.1. $\sigma(1,2)\neq 0$	$\to C_k\sim k^w\exp\,[\beta k^{1/3}]$	Soit : $\beta=0$, $w=-\sigma(0,3)/\sigma(1,2)$ — ou : $\beta^3=-648\sigma(1,2)/\sigma(4,0)$, $w=-Q_8/\left[\frac{1}{162}\beta^3\sigma(4,0)+\sigma(1,2)\right]$
2.2.2.3.2. $\sigma(1,2)=0$ et $\sigma(0,3)\neq 0$	$\to C_k\sim k^w\exp\,[\gamma k^{1/4}]$	$\gamma^4=-6144\,\sigma(0,3)/\sigma(4,0)$, $w=9/8-\sigma(3,1)/\sigma(4,0)$

2.2.2.3.3. $\sigma(1,2) = 0$ et $\sigma(0,3) = 0$ $\rightarrow C_k \sim k^w$

$(1/24)\, w(w-1)(w-2)(w-3)\,\sigma(4,0) + (1/6)\, w(w-1)(w-2)\,\sigma(3,1) + (1/2)\, w(w-1)\,\sigma(2,2) + w\sigma(1,3) + \sigma(0,4) = 0$

Remarques : si $w_1 = w_2 \rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k$

si $w_1 = w_2 = w_3 \rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k \sim C_k^{(3)} (\ln k)^2$

si $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 \rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k \sim C_k^{(3)} (\ln k)^2 \sim C_k^{(4)} (\ln k)^3$

RECURRENCE DE POINCARE DU TYPE 2

Racine $z = 1$ *simple* : $\sigma(0,0) = 0$ et $\sigma(1,0) \neq 0$

$\rightarrow C_k \sim k^w \exp[\alpha k^{1/2}]$ $\alpha = -2\,\sigma(0,1)/\sigma(1,0)$, $w = -S_1/\sigma(1,0)$

Racine $z = 1$ *double* : $\sigma(0,0) = \sigma(1,0) = 0$ et $\sigma(2,0) \neq 0$

1. $\sigma(0,1) \neq 0$ $\rightarrow C_k \sim k^w \exp[\alpha k^{3/4} + \beta k^{2/4} + \gamma k^{1/4}]$

$\alpha^2 = -32/9\,\sigma(0,1)/\sigma(2,0)$
$\beta = -[3/16\,\alpha^2\,\sigma(3,0) + 2\,\sigma(1,1)]/\sigma(2,0)$
$\gamma = -(1/\alpha)D_1/\sigma(2,0)$
$w = -(1/\alpha)D_2/\sigma(2,0)$

2. $\sigma(0,1) = 0$

Former l'équation : $1/8\,\beta^2\,\sigma(2,0) + 1/2\,\beta\,\sigma(1,1) + \sigma(0,2) = 0$ $\rightarrow$ $\beta = \beta_1, \beta_2$

2.1. $\beta_1 \neq \beta_2$
$[\sigma^2(1,1) \neq 2\,\sigma(2,0)\,\sigma(0,2)]$ $\rightarrow C_k \sim k^w \exp[\beta k^{1/2}]$

$\beta = \beta_i$
$w = -H_1/[1/2\,\beta\,\sigma(2,0) + \sigma(1,1)]$

2.2. $\beta_1 = \beta_2$
$[\sigma^2(1,1) = 2\,\sigma(2,0)\,\sigma(0,2)]$

2.2.1. $H_1 \neq 0$ $\rightarrow C_k \sim k^w \exp[\beta k^{2/4} + \gamma k^{1/4}]$

$\beta = -2\,\sigma(1,1)/\sigma(2,0)$
$\gamma^2 = -32\,H_1/\sigma(2,0)$
$w = -D_3/\sigma(2,0)$

2.2.2. $H_1 = 0$ $\rightarrow C_k \sim k^w \exp[\gamma k^{1/2}]$

$\gamma = -2\,\sigma(1,1)/\sigma(2,0)$
$1/2\, w^2\,\sigma(2,0) + wD_4 + H_2 = 0$

Remarque : si $w_1 = w_2$ $\rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k$

Racine $z = 1$ *triple* : $\sigma(0, 0) = \sigma(1, 0) = \sigma(2, 0) = 0$ et $\sigma(3, 0) \neq 0$

1. $\sigma(0, 1) \neq 0$ $\quad \rightarrow C_k \sim k^w \exp\,[\alpha k^{5/6} + \beta k^{4/6} + \gamma k^{3/6} + \delta k^{2/6} + \varepsilon k^{1/6}]$

$$\alpha^3 = -\,1296/125\, \sigma(0, 1)/\sigma(3, 0)$$
$$\beta = -\,(1/\alpha)\,[25/288\, \alpha^3\, \sigma(4, 0) + 18/5\, \sigma(1, 1)]/\sigma(3, 0)$$
$$\gamma = -\,(1/\alpha^2)D_5/\sigma(3, 0)$$
$$\delta = -\,(1/\alpha^2)D_6/\sigma(3, 0)$$
$$\varepsilon = -\,(1/\alpha^2)D_7/\sigma(3, 0)$$
$$w = -\,(1/\alpha^2)D_8/\sigma(3, 0)$$

2. $\sigma(0, 1) = 0$

2.1. $\sigma(1, 1) \neq 0$ $\quad \rightarrow C_k \sim k^w \exp\,[\alpha k^{3/4} + \beta k^{2/4} + \gamma k^{1/4}]$

Soit :	ou :
$\alpha = 0$	$\alpha^2 = -\,32/3\, \sigma(1, 1)/\sigma(3, 0)$
$\beta = -\,2\, \sigma(0, 2)/\sigma(1, 1)$	$\beta = D_9/\sigma(1, 1)$
$\gamma = 0$	$\gamma = D_{10}/\sigma(1, 1)$
$w = -\,[H_1 + 1/8\beta\, \sigma(2, 0)]/\sigma(1, 1)$	$w = \frac{1}{2}\,[H_1 + D_{11}]/\sigma(1, 1)$

2.2. $\sigma(1, 1) = 0$

2.2.1. $\sigma(0, 2) \neq 0$ $\quad \rightarrow C_k \sim k^w \exp\,[\beta k^{4/6} + \gamma k^{3/6} + \delta k^{2/6} + \varepsilon k^{1/6}]$

$$\beta^3 = -\,81/4\, \sigma(0, 2)/\sigma(3, 0)$$
$$\gamma = -\,2\, \sigma(2, 1)/\sigma(3, 0)$$
$$\delta = -\,(1/\beta)D_{12}/\sigma(3, 0)$$
$$\varepsilon = -\,(1/\beta^2)D_{13}/\sigma(3, 0)$$
$$w = -\,(1/\beta^2)D_{14}/\sigma(3, 0)$$

2.2.2. $\sigma(0, 2) = 0$

Former l'équation : $\quad 1/48\, \gamma^3\, \sigma(3, 0) + 1/8\, \gamma^2\, \sigma(2, 1) + 1/2\, \gamma\, \sigma(1, 2) + \sigma(0, 3) = 0 \rightarrow \gamma_i\ (i = 1, 2, 3)$

Pour chaque racine γ_i, discuter les cas suivants :

2.2.2.1. γ_i racine simple

$[1/8\, \gamma_i^2\, \sigma(3, 0) + 1/2\, \gamma_i\, \sigma(2, 1) + \sigma(1, 2) \neq 0]$ $\quad \rightarrow C_k \sim k^w \exp\,[\gamma k^{1/2}]$

$$\gamma = \gamma_i$$
$$w = -\,H_2/[1/8\gamma^2\, \sigma(3, 0) + 1/2\gamma\, \sigma(2, 1) + \sigma(1, 2)]$$

2.2.2.2. γ_i racine double $[1/8\gamma_i^2\,\sigma(3,0) + 1/2\gamma_i\,\sigma(2,1) + \sigma(1,2) = 0$ et $1/2\gamma_i\,\sigma(3,0) + \sigma(2,1) \neq 0]$		
2.2.2.2.1. $H_2 \neq 0$	$\rightarrow C_k \sim k^w \exp\,[\gamma k^{2/4} + \delta k^{1/4}]$	$\gamma = \gamma_i$ $\delta^2 = -32\,H_2/[1/2\gamma\,\sigma(3,0) + \sigma(2,1)]$ $w = -1/24 - [H_3 + 1/96\delta^2\,\sigma(3,0)]\,/\,[1/2\gamma\,\sigma(3,0) + \sigma(2,1)]$
2.2.2.2.2. $H_2 = 0$	$\rightarrow C_k \sim k^w \exp\,[\gamma k^{1/2}]$	$\gamma = \gamma_i$ $(w^2/2 - w/12)\,[1/2\gamma\,\sigma(3,0) + \sigma(2,1)] + wH_3 + H_4 = 0$
Remarque : si $w_1 = w_2$	$\rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k$	
2.2.2.3. γ_i racine triple $[1/8\gamma_i^2\,\sigma(3,0) + 1/2\gamma_i\,\sigma(2,1) + \sigma(1,2) = 0$ et $1/2\gamma_i\,\sigma(3,0) + \sigma(2,1) = 0]$		
2.2.2.3.1. $H_2 \neq 0$	$\rightarrow C_k \sim k^w \exp\,[\gamma k^{3/6} + \delta k^{2/6} + \varepsilon k^{1/6}]$	$\gamma = -2\,\sigma(2,1)/\sigma(3,0)$ $\delta^3 = -162\,H_2/\sigma(3,0)$ $\varepsilon = -(1/\delta)\,36\,H_3/\sigma(3,0)$ $w = -(1/\delta^2)\,[3\,\varepsilon H_3 + D_{15}]/\sigma(3,0)$
2.2.2.3.2. $H_2 = 0$		
2.2.2.3.2.1. $H_3 \neq 0$	$\rightarrow C_k \sim k^w \exp\,[\gamma k^{2/4} + \delta k^{1/4}]$	$\gamma = -2\,\sigma(2,1)/\sigma(3,0)$ Soit : $\delta = 0$, $w = -H_4/H_3$ ou : $\delta^2 = -96\,H_3/\sigma(3,0)$, $w = H_4/(2\,H_3) + 9/8 - 3\,\dfrac{[1/8\gamma^2\sigma(4,0) + 1/2\gamma\sigma(3,1) + \sigma(2,2)]}{2\sigma(3,0)}$
2.2.2.3.2.2. $H_3 = 0$, $H_4 \neq 0$	$\rightarrow C_k \sim k^w \exp\,[\gamma k^{3/6} + \varepsilon k^{1/6}]$	$\gamma = -2\,\sigma(2,1)/\sigma(3,0)$ $\varepsilon^3 = -1296\,H_4/\sigma(3,0)$ $w = -[1/8\gamma^2\sigma(4,0) - 5/6\sigma(3,0) + 1/2\gamma\,\sigma(3,1) + \sigma(2,2)]/\sigma(3,0)$

2.2.2.3.2.3. $H_3 = 0$

$H_4 = 0 \quad \rightarrow C_k \sim k^w \exp\,[\gamma k^{1/2}]$

$\gamma = -\,2\,\sigma(2,1)/\sigma(3,0)$

$1/6w\,(w-1)\,(w-2)\,\sigma(3,0) + 1/2\,(w^2 - w)$
$[1/8\gamma^2\,\sigma(4,0) + 1/2\gamma\,\sigma(3,1) + \sigma(2,2)] + wD_{16} +$
$D_{17} = 0$

Remarque : si $w_1 = w_2 \neq w_3 \quad \rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k$

si $w_1 = w_2 = w_3 \quad \rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k \sim C_k^{(3)} (\ln k)^2$

RECURRENCE DE POINCARE DU TYPE 3

Racine $z = 1$ *simple* : $\sigma(0,0) = 0$ et $\sigma(1,0) \neq 0$

$\rightarrow C_k \sim k^w \exp\,[\alpha k^{2/3} + \beta k^{1/3}]$

$\alpha = -\,3/2\,\sigma(0,1)/\sigma(1,0)$
$\beta = -\,S_2/\sigma(1,0)$
$w = -\,S_3/\sigma(1,0)$

Racine $z = 1$ *double* : $\sigma(0,0) = \sigma(1,0) = 0$ et $\sigma(2,0) \neq 0$

1. $\sigma(0,1) \neq 0 \quad \rightarrow C_k \sim k^w \exp\,[\alpha k^{5/6} + \beta k^{4/6} + \gamma k^{3/6}$
$\delta k^{2/6} + \varepsilon k^{1/6}]$

$\alpha^2 = -\,72/25\,\sigma(0,1)/\sigma(2,0)$
$\beta = -\,[25/144\,\alpha^2\,\sigma(3,0) + 3/2\,\sigma(1,1)]/\sigma(2,0)$
$\gamma = -\,(1/\alpha)T_1/\sigma(2,0)$
$\delta = -\,(1/\alpha)T_2/\sigma(2,0)$
$\varepsilon = -\,(1/\alpha)T_3/\sigma(2,0)$
$w = -\,(1/\alpha)T_4/\sigma(2,0)$

2. $\sigma(0,1) = 0$

Former l'équation : $\quad 2/9\,\beta^2\,\sigma(2,0) + 2/3\,\beta\,\sigma(1,1) + \sigma(0,2) = 0 \quad \rightarrow \beta = \beta_1, \beta_2$

2.1. $\beta_1 \neq \beta_2$
$[\sigma^2(1,1) \neq 2\,\sigma(2,0)\,\sigma(0,2)] \quad \rightarrow C_k \sim k^w \exp\,[\beta k^{2/3} + \delta k^{1/3}]$

$\beta = \beta_i$
$\delta = -\,H_5/[2\beta\,\sigma(2,0) + 3\,\sigma(1,1)]$
$w = -\,T_5/[2\beta\,\sigma(2,0) + 3\,\sigma(1,1)]$

2.2. $\beta_1 = \beta_2$

$[\sigma^2(1, 1) = 2\,\sigma(2, 0)\,\sigma(0, 2)]$

2.2.1. $H_5 \neq 0$ $\quad \rightarrow C_k \sim k^w \exp\,[\beta k^{4/6} + \gamma k^{3/6} + \delta k^{2/6} + \varepsilon k^{1/6}]$

$$\beta = -\,3/2\,\sigma(1, 1)/\sigma(2, 0)$$
$$\gamma^2 = -\,8/9\,H_5/\sigma(2, 0)$$
$$\delta = -\,T_6/\sigma(2, 0)$$
$$\varepsilon = -\,(1/\gamma)\,[4\,T_5 + \beta\gamma^2\,\sigma(3, 0) + 3/2\,\gamma^2\,\sigma(2, 1)]/\sigma(2, 0)$$
$$w = -\,(1/\gamma)\,T_7/\sigma(2, 0)$$

2.2.2. $H_5 = 0$

Former l'équation :

$$1/6\,\delta^2\,\sigma(2, 0) + \delta\,[2/9\,\beta^2\,\sigma(3, 0) + 2/3\,\beta\,\sigma(2, 1) + \sigma(1, 2)] - 1/3\,\beta\,\sigma(2, 0) + 2/81\,\beta^4\,\sigma(4, 0) + 4/27\,\beta^3\,\sigma(3, 1) + 2/3\,\beta^2\,\sigma(2, 2) + 2\,\beta\,\sigma(1, 3) + 3\,\sigma(0, 4) = 0$$

$$\rightarrow \delta = \delta_1, \delta_2$$

2.2.2.1. $\delta_1 \neq \delta_2$ $\quad \rightarrow C_k \sim k^w \exp\,[\beta k^{2/3} + \delta k^{1/3}]$

$$\beta = -\,3/2\,\sigma(1, 1)/\sigma(2, 0)$$
$$\delta = \delta_i$$
$$w = -\,9\,H_6/[2\,\beta^2\,\sigma(3, 0) + 3\,\delta\,\sigma(2, 0) + 6\,\beta\,\sigma(2, 1) + 9\,\sigma(1, 2)]$$

2.2.2.2. $\delta_1 = \delta_2$

2.2.2.2.1. $H_6 \neq 0$ $\quad \rightarrow C_k \sim k^w \exp\,[\beta k^{4/6} + \delta k^{2/6} + \varepsilon k^{1/6}]$

$$\beta = -\,3/2\,\sigma(1, 1)/\sigma(2, 0)$$
$$\delta = -\,[2/3\,\beta^2\,\sigma(3, 0) + 2\,\beta\,\sigma(2, 1) + 3\,\sigma(1, 2)]/\sigma(2, 0)$$
$$\varepsilon^2 = -\,72\,H_6/\sigma(2, 0)$$
$$w = 5/12 - T_8/\sigma(2, 0)$$

2.2.2.2.2. $H_6 = 0$ $\quad \rightarrow C_k \sim k^w \exp\,[\beta k^{2/3} + \delta k^{1/3}]$

$$\beta = -\,3/2\,\sigma(1, 1)/\sigma(2, 0)$$
$$\delta = -\,[2/3\,\beta^2\,\sigma(3, 0) + 2\,\beta\,\sigma(2, 1) + 3\,\sigma(1, 2)]/\sigma(2, 0)$$
$$1/2\,(w^2 - w)\,\sigma(2, 0) + wT_8 + T_9 = 0$$

Remarque : si $w_1 = w_2$ $\quad \rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k$

RECURRENCE DE POINCARE DU TYPE 4

Racine $z = 1$ *simple* : $\sigma(0, 0) = 0$ et $\sigma(1, 0) \neq 0$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp\left[\alpha k^{3/4} + \beta k^{2/4} + \gamma k^{1/4}\right]$$

$$\begin{aligned} \alpha &= -\,4/3\,\sigma(0, 1)/\sigma(1, 0) \\ \beta &= -\,S_4/\sigma(1, 0) \\ \gamma &= -\,S_5/\sigma(1, 0) \\ w &= -\,S_6/\sigma(1, 0) \end{aligned}$$

RECURRENCE DE POINCARE DU TYPE 5

Racine $z = 1$ *simple* : $\sigma(0, 0) = 0$ et $\sigma(1, 0) \neq 0$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp\left[\alpha k^{4/5} + \beta k^{3/5} + \gamma k^{2/5} + \delta k^{1/5}\right]$$

$$\begin{aligned} \alpha &= -\,5/4\,\sigma(0, 1)/\sigma(1, 0) \\ \beta &= -\,S_7/\sigma(1, 0) \\ \gamma &= -\,S_8/\sigma(1, 0) \\ \delta &= -\,S_9/\sigma(1, 0) \\ w &= -\,S_{10}/\sigma(1, 0) \end{aligned}$$

RECURRENCE DE POINCARE DU TYPE 6

Racine $z = 1$ *simple* : $\sigma(0, 0) = 0$ et $\sigma(1, 0) \neq 0$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp\left[\alpha k^{5/6} + \beta k^{4/6} + \gamma k^{3/6} + \delta k^{2/6} + \varepsilon k^{1/6}\right]$$

$$\begin{aligned} \alpha &= -\,6/5\,\sigma(0, 1)/\sigma(1, 0) \\ \beta &= -\,S_{11}/\sigma(1, 0) \\ \gamma &= -\,S_{12}/\sigma(1, 0) \\ \delta &= -\,S_{13}/\sigma(1, 0) \\ \varepsilon &= -\,S_{14}/\sigma(1, 0) \\ w &= -\,S_{15}/\sigma(1, 0) \end{aligned}$$

$$Q_1 = 2/405\ \alpha^3\sigma(5,0) + \sigma(2,1) + 1/18\ \alpha\beta\sigma(4,0)$$

$$Q_2 = 1/768\ \alpha^4\sigma(4,0) + 1/16\ \alpha^2\sigma(2,1) + 1/2\ \sigma(0,2)$$

$$Q_3 = 9/160\ \alpha^4\sigma(5,0) + 64/3\ \sigma(1,1)$$

$$Q_4 = 2\ \alpha^2\beta^2\sigma(4,0) + 3/8\ \alpha^4\beta\ \sigma(5,0) + 9/640\ \alpha^6\sigma(6,0) + 16\ \alpha^2\sigma(2,1) + 256/9\ \beta\ \sigma(1,1)$$

$$\begin{aligned} Q_5 = {} & 1/2\ \alpha^2\gamma\ \beta\ \sigma(4,0) + 2/9\ \alpha\beta^3\sigma(4,0) + 1/8\ \alpha^3\beta^2\sigma(5,0) + 3/64\ \alpha^4\gamma\ \sigma(5,0) \\ & + 9/640\ \alpha^5\beta\ \sigma(6,0) + 27/71680\ \alpha^7\sigma(7,0) - 3/8\ \alpha^3\sigma(4,0) + 16/3\ \alpha\beta\ \sigma(2,1) \\ & - 32/9\ \gamma\ \sigma(1,1) + \alpha^3\sigma(3,1) \end{aligned}$$

$$Q_6 = 4/3645\ \alpha^5\sigma(5,0) + 2/9\ \alpha^2\sigma(2,1)$$

$$Q_7 = -1/32\ \beta^2\sigma(4,0) + 1/1920\ \beta^4\sigma(5,0) - 1/4\ \sigma(2,1) + 1/24\ \beta^2\sigma(3,1) + \sigma(1,2)$$

$$Q_8 = -1/162\ \beta^3\sigma(4,0) + 1/162\ \beta^3\sigma(3,1) + \sigma(0,3)$$

$$\begin{aligned} Q_9 = {} & 3/256\ \beta\ \sigma(4,0) - 7/384\ \beta^2\sigma(4,0) + 1/768\ \beta\gamma\ \sigma(4,0) + 1/1536\ \beta^4\sigma(5,0) \\ & - 3/32\ \sigma(2,1) + 1/32\ \beta^2\sigma(3,1) + 1/4\ \sigma(1,2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{10} = {} & -2/81\ \alpha^3\sigma(4,0) + 1/81\ \alpha^2\beta^2\sigma(4,0) + 2/729\ \alpha^4\beta\ \sigma(5,0) + 4/32805\ \alpha^6\sigma(6,0) \\ & + 2/9\ \alpha\beta\ \sigma(2,1) + 4/81\ \alpha^3\sigma(3,1) + \sigma(0,2) \end{aligned}$$

$$Q_{11} = 1/8\ \beta^2\sigma(3,1) - 1/16\ \beta^2\sigma(4,0) + 1/384\ \beta^4\sigma(5,0) + \sigma(1,2)$$

$$\begin{aligned} Q_{12} = {} & 5/128\ \beta^2\sigma(4,0) - 1/384\ \beta^4\sigma(5,0) + 1/46080\ \beta^6\sigma(6,0) + 1/384\ \beta^4\sigma(4,1) \\ & - 1/16\ \beta^2\sigma(3,1) + 1/8\ \beta^2\sigma(2,2) + \sigma(0,3) \end{aligned}$$

$$S_1 = 1/8\ \alpha^2\sigma(2,0) + 1/2\ \alpha\ \sigma(1,1) + \sigma(0,2)$$

$$S_2 = 2/3\ \alpha^2\sigma(2,0) + 2\ \alpha\ \sigma(1,1) + 3\ \sigma(0,2)$$

$$\begin{aligned} S_3 = {} & 2/9\ \alpha\beta\ \sigma(2,0) + 4/81\ \alpha^3\sigma(3,0) + 2/9\ \alpha^2\sigma(2,1) + 1/3\ \beta\ \sigma(1,1) + 2/3\ \alpha\ \sigma(1,2) \\ & + \sigma(0,3) \end{aligned}$$

$$S_4 = 9/16\ \alpha^2\sigma(2,0) + 3/2\ \alpha\ \sigma(1,1) + 2\ \sigma(0,2)$$

$$\begin{aligned} S_5 = {} & 3/2\ \alpha\beta\ \sigma(2,0) + 9/32\ \alpha^3\sigma(3,0) + 9/8\ \alpha^2\sigma(2,1) + 2\ \beta\ \sigma(1,1) + 3\ \alpha\ \sigma(1,2) \\ & + 4\sigma(0,3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_6 = {} & 1/8\ \beta^2\sigma(2,0) + 3/16\ \alpha\gamma\ \sigma(2,0) + 27/2048\ \alpha^4\sigma(4,0) + 9/64\ \alpha^2\beta\ \sigma(3,0) \\ & + 3/8\ \alpha\beta\ \sigma(2,1) + 1/4\ \gamma\ \sigma(1,1) + 9/128\ \alpha^3\sigma(3,1) + 9/32\ \alpha^2\sigma(2,2) + 1/2\ \beta\ \sigma(1,2) \\ & + 3/4\ \alpha\ \sigma(1,3) + \sigma(0,4) \end{aligned}$$

$$S_7 = 8/15\ \alpha^2\sigma(2,0) + 4/3\ \alpha\ \sigma(1,1) + 5/3\ \sigma(0,2)$$

$$\begin{aligned} S_8 = {} & 6/5\ \alpha\beta\ \sigma(2,0) + 16/75\ \alpha^3\sigma(3,0) + 3/2\ \beta\ \sigma(1,1) + 4/5\ \alpha^2\sigma(2,1) + 2\ \alpha\ \sigma(1,2) \\ & + 5/2\ \sigma(0,3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_9 = {} & 9/10\ \beta^2\sigma(2,0) + 8/5\ \alpha\gamma\ \sigma(2,0) + 24/25\ \alpha^2\beta\ \sigma(3,0) + 32/375\ \alpha^4\sigma(4,0) \\ & + 2\ \gamma\ \sigma(1,1) + 12/5\ \alpha\beta\ \sigma(2,1) + 32/75\ \alpha^3\sigma(3,1) + 3\ \beta\ \sigma(1,2) + 8/5\ \alpha^2\sigma(2,2) \\ & + 4\ \alpha\ \sigma(1,3) + 5\ \sigma(0,4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{10} = {} & 4/25\ \alpha\delta\ \sigma(2,0) + 6/25\ \beta\gamma\ \sigma(2,0) + 18/125\ \alpha\beta^2\sigma(3,0) + 16/125\ \alpha^2\gamma\ \sigma(3,0) \\ & + 32/625\ \alpha^3\beta\ \sigma(4,0) + 128/46875\ \alpha^5\sigma(5,0) + 1/5\ \delta\ \sigma(1,1) + 9/50\ \beta^2\sigma(2,1) \\ & + 8/25\ \alpha\gamma\ \sigma(2,1) + 24/125\ \alpha^2\beta\ \sigma(3,1) + 32/1875\ \alpha^4\sigma(4,1) + 2/5\ \gamma\ \sigma(1,2) \\ & + 12/25\ \alpha\beta\ \sigma(2,2) + 32/375\ \alpha^3\sigma(3,2) + 3/5\ \beta\ \sigma(1,3) + 8/25\ \alpha^2\sigma(2,3) \\ & + 4/5\ \alpha\ \sigma(1,4) + \sigma(0,5) \end{aligned}$$

$$S_{11} = 25/48\ \alpha^2\sigma(2,0) + 5/4\ \alpha\ \sigma(1,1) + 3/2\ \sigma(0,2)$$

$$\begin{aligned} S_{12} = {} & 10/9\ \alpha\beta\ \sigma(2,0) + 125/648\ \alpha^3\sigma(3,0) + 25/36\ \alpha^2\sigma(2,1) + 4/3\ \beta\ \sigma(1,1) \\ & + 5/3\ \alpha\ \sigma(1,2) + 2\ \sigma(0,3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{13} = {} & 2/3\ \beta^2\sigma(2,0) + 5/4\ \alpha\gamma\ \sigma(2,0) + 25/36\ \alpha^2\beta\ \sigma(3,0) + 625/10368\ \alpha^4\sigma(4,0) \\ & + 5/3\ \alpha\beta\ \sigma(2,1) + 3/2\ \gamma\ \sigma(1,1) + 125/432\ \alpha^3\sigma(3,1) + 25/24\ \alpha^2\sigma(2,2) \\ & + 2\ \beta\ \sigma(1,2) + 5/2\ \alpha\ \sigma(1,3) + 3\ \sigma(0,4) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_{14} = {} & 5/3\,\alpha\delta\,\sigma(2,0) + 2\,\beta\gamma\,\sigma(2,0) + 25/24\,\alpha^2\gamma\,\sigma(3,0) + 10/9\,\alpha\beta^2\,\sigma(3,0) \\
& + 125/324\,\alpha^3\beta\,\sigma(4,0) + 3125/155520\,\alpha^5\sigma(5,0) + 4/3\,\beta^2\sigma(2,1) + 2\,\delta\,\sigma(1,1) \\
& + 5/2\,\alpha\gamma\,\sigma(2,1) + 25/18\,\alpha^2\beta\,\sigma(3,1) + 625/5184\,\alpha^4\sigma(4,1) + 10/3\,\alpha\beta\,\sigma(2,2) \\
& + 3\,\gamma\,\sigma(1,2) + 125/216\,\alpha^3\sigma(3,2) + 25/12\,\alpha^2\sigma(2,3) + 4\,\beta\,\sigma(1,3) + 5\,\alpha\,\sigma(1,4) \\
& + 6\,\sigma(0,5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{15} = {} & 1/8\,\gamma^2\sigma(2,0) + 5/36\,\alpha\varepsilon\,\sigma(2,0) + 2/9\,\beta\delta\,\sigma(2,0) + 25/216\,\alpha^2\delta\,\sigma(3,0) \\
& + 4/81\,\beta^3\sigma(3,0) + 5/18\,\alpha\beta\gamma\,\sigma(3,0) + 25/324\,\alpha^2\beta^2\sigma(4,0) + 125/2592\,\alpha^3\gamma\,\sigma(4,0) \\
& + 625/46656\,\alpha^4\beta\,\sigma(5,0) + 3125/6718464\,\alpha^6\sigma(6,0) + 5/18\,\alpha\delta\,\sigma(2,1) + 1/3\,\beta\gamma\,\sigma(2,1) \\
& + 1/6\,\varepsilon\,\sigma(1,1) + 25/144\,\alpha^2\gamma\,\sigma(3,1) + 5/27\,\alpha\beta^2\,\sigma(3,1) + 125/1944\,\alpha^3\beta\,\sigma(4,1) \\
& + 3125/933120\,\alpha^5\sigma(5,1) + 2/9\,\beta^2\,\sigma(2,2) + 1/3\,\delta\,\sigma(1,2) + 5/12\,\alpha\gamma\,\sigma(2,2) \\
& + 25/108\,\alpha^2\beta\,\sigma(3,2) + 625/31104\,\alpha^4\sigma(4,2) + 5/9\,\alpha\beta\,\sigma(2,3) + 1/2\,\gamma\,\sigma(1,3) \\
& + 125/1296\,\alpha^3\sigma(3,3) + 25/72\,\alpha^2\sigma(2,4) + 2/3\,\beta\,\sigma(1,4) + 5/6\,\alpha\,\sigma(1,5) + \sigma(0,6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1 = {} & 9/128\,\alpha^4\sigma(4,0) + 3/2\,\alpha^2\sigma(2,1) - 3/4\,\alpha^2\beta\,\sigma(3,0) + 2/3\,\beta^2\sigma(2,0) - 8/3\,\beta\,\sigma(1,1) \\
& - 16/3\,\sigma(0,2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2 = {} & 27/10240\,\alpha^5\sigma(5,0) + 3/32\,\alpha^3\sigma(3,1) + 3/64\,\alpha^3\beta\,\sigma(4,0) - 3/32\,\alpha^2\gamma\,\sigma(3,0) \\
& - 1/8\,\alpha\,\sigma(2,0) + \alpha\,\sigma(1,2) + 1/2\,\alpha\beta\,\sigma(2,1) + 1/8\,\alpha\beta^2\sigma(3,0) + 1/6\,\beta\gamma\,\sigma(2,0) \\
& + 1/3\,\gamma\,\sigma(1,1)
\end{aligned}
$$

$$
D_3 = 1/8\,\beta^2\sigma(3,0) + 1/2\,\beta\,\sigma(2,1) - 3/8\,\sigma(2,0) + \sigma(1,2)
$$

$$
D_4 = 1/8\,\gamma^2\sigma(3,0) - 1/2\,\sigma(2,0) + 1/2\,\gamma\,\sigma(2,1) + \sigma(1,2)
$$

$$
\begin{aligned}
D_5 = {} & 16/15\,\alpha\beta^2\sigma(3,0) + 10/27\,\alpha^3\beta\,\sigma(4,0) - 25/1296\,\alpha^5\sigma(5,0) + 2\,\alpha^2\sigma(2,1) \\
& + 96/25\,\beta\,\sigma(1,1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_6 = {} & 32/75\,\beta^3\sigma(3,0) + 12/5\,\alpha\beta\gamma\,\sigma(3,0) + 2/3\,\alpha^2\beta^2\sigma(4,0) + 5/12\,\alpha^3\gamma\,\sigma(4,0) \\
& + 25/216\,\alpha^4\beta\,\sigma(5,0) + 125/31104\,\alpha^6\sigma(6,0) + 24/5\,\alpha\beta\,\sigma(2,1) + 108/25\,\gamma\,\sigma(1,1) \\
& + 5/6\,\alpha^3\sigma(3,1) + 216/25\,\sigma(0,2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_7 = {} & 9/5\,\alpha\gamma^2\sigma(3,0) + 16/5\,\alpha\beta\delta\,\sigma(3,0) + 48/25\,\beta^2\gamma\,\sigma(3,0) + 5/9\,\alpha^3\delta\,\sigma(4,0) \\
& + 2/3\,\alpha^2\beta\gamma\,\sigma(4,0) + 32/15\,\alpha\beta^3\sigma(4,0) + 4/3\,\alpha^2\beta\gamma\,\sigma(4,0) + 25/144\,\alpha^4\gamma\,\sigma(5,0) \\
& + 10/27\,\alpha^3\beta^2\,\sigma(5,0) + 25/648\,\alpha^5\beta\,\sigma(6,0) + 625/653184\,\alpha^7\sigma(7,0) + 96/25\,\beta^2\sigma(2,1) \\
& + 144/25\,\delta\,\sigma(1,1) + 36/5\,\alpha\gamma\,\sigma(2,1) + 4\,\alpha^2\beta\,\sigma(3,1) + 25/72\,\alpha^4\sigma(4,1) + 72/5\,\alpha\,\sigma(1,2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_8 = {} & 16/75\,\beta^2\delta\,\sigma(3,0) + 4/15\,\alpha\beta\varepsilon\,\sigma(3,0) + 6/25\,\beta\gamma^2\,\sigma(3,0) + 2/5\,\alpha\gamma\delta\,\sigma(3,0) \\
& + 1/8\,\alpha^2\gamma^2\sigma(4,0) + 16/675\,\beta^4\sigma(4,0) + 5/108\,\alpha^3\varepsilon\,\sigma(4,0) + 2/9\,\alpha^2\beta\,\delta\,\sigma(4,0) \\
& + 4/15\,\alpha\beta^2\gamma\,\sigma(4,0) + 25/1296\,\alpha^4\delta\,\sigma(5,0) + 4/81\,\alpha^2\beta^3\,\sigma(5,0) + 5/54\,\alpha^3\beta\,\gamma\,\sigma(5,0) \\
& + 5/648\,\alpha^4\beta^2\,\sigma(6,0) - 1/6\,\alpha^2\sigma(3,0) + 25/5184\,\alpha^5\gamma\,\sigma(6,0) + 5/972\,\alpha^4\beta^2\sigma(6,0) \\
& + 125/139968\,\alpha^6\beta\,\sigma(7,0) + 3125/188116992\,\alpha^8\sigma(8,0) + 4/5\,\alpha\delta\,\sigma(2,1) \\
& + 24/25\,\beta\gamma\,\sigma(2,1) + 12/25\,\varepsilon\,\sigma(1,1) + 1/2\,\alpha^2\gamma\,\sigma(3,1) + 8/15\,\alpha\beta^2\sigma(3,1) \\
& + 5/27\,\alpha^3\beta\,\sigma(4,1) + 25/2592\,\alpha^5\sigma(5,1) + \alpha^2\sigma(2,2) + 48/25\,\beta\,\sigma(1,2)
\end{aligned}
$$

$$
D_9 = 27/2048\,\alpha^4\sigma(4,0) + 9/32\,\alpha^2\sigma(2,1) + \sigma(0,2)
$$

$$
\begin{aligned}
D_{10} = {} & 3/16\,\alpha\beta^2\sigma(3,0) + 9/128\,\alpha^3\beta\,\sigma(4,0) - 81/20480\,\alpha^5\sigma(5,0) + 3/4\,\alpha\beta\,\sigma(2,1) \\
& + 9/64\,\alpha^3\sigma(3,1) + 3/2\,\alpha\,\sigma(1,2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{11} = {} & 3/32\,\alpha\beta\gamma\,\sigma(3,0) - 9/128\,\alpha^2\sigma(3,0) + 9/256\,\alpha^2\beta^2\sigma(4,0) + 9/512\,\alpha^3\gamma\,\sigma(4,0) \\
& + 27/4096\,\alpha^4\beta\,\sigma(5,0) + 81/327680\,\alpha^6\sigma(6,0) + 3/16\,\alpha\gamma\,\sigma(2,1) + 27/2048\,\alpha^4\sigma(4,1) \\
& + 9/64\,\alpha^2\beta\,\sigma(3,1) + 9/32\,\alpha^2\sigma(2,2) + 1/8\,\beta\,\sigma(2,0)
\end{aligned}
$$

$$
D_{12} = 27/24\,\gamma^2\sigma(3,0) + 1/9\,\beta^3\sigma(4,0) + 9/2\,\gamma\,\sigma(2,1) + 9\,\sigma(1,2)
$$

$$
\begin{aligned}
D_{13} = {} & 3\,\beta\gamma\delta\,\sigma(3,0) - 9/16\,\gamma^3\sigma(3,0) + 2/3\,\beta^3\gamma\,\sigma(4,0) + 27/8\,\gamma^2\sigma(2,1) + 6\,\beta\delta\,\sigma(2,1) \\
& + 4/3\,\beta^3\sigma(3,1) + 27/2\,\gamma\,\sigma(1,2) + 27\,\sigma(0,3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{14} = {} & 1/6\,\beta\delta^2\,\sigma(3,0) - 1/3\,\beta^2\sigma(3,0) + 1/4\,\beta\gamma\varepsilon\,\sigma(3,0) + 3/16\,\gamma^2\delta\,\sigma(3,0) \\
& + 1/8\,\beta^2\gamma^2\,\sigma(4,0) + 2/27\,\beta^3\delta\,\sigma(4,0) + 2/405\,\beta^5\sigma(5,0) + 1/2\,\beta\varepsilon\,\sigma(2,1) \\
& + 3/4\,\gamma\delta\,\sigma(2,1) + 1/2\,\beta^2\gamma\,\sigma(3,1) + \beta^2\sigma(2,2) + 3/2\,\delta\,\sigma(1,2)
\end{aligned}
$$

$$D_{15} = 1/12\ \delta\varepsilon^2\sigma(3,0) - 2/3\ \delta^2\sigma(3,0) + 1/8\ \gamma^2\delta^2\sigma(4,0) + 1/2\ \gamma\delta^2\sigma(3,1) + \delta^2\sigma(2,2)$$

$$D_{16} = 1/384\ \gamma^4\sigma(5,0) - 1/16\ \gamma^2\sigma(4,0) - 1/8\ \gamma\,\sigma(3,1) + 1/48\ \gamma^3\sigma(4,1) + 1/8\ \gamma^2\sigma(3,2) + 1/2\ \gamma\,\sigma(2,3) + \sigma(1,4)$$

$$D_{17} = \gamma^6/46080\ \sigma(6,0) + 1/3840\ \gamma^5\sigma(5,1) - \gamma^4/384\ \sigma(5,0) + 5/128\ \gamma^2\sigma(4,0) + 1/16\gamma\,\sigma(3,1) - 1/64\ \gamma^3\sigma(4,1) - 1/16\ \gamma^2\sigma(3,2) + 1/384\ \gamma^4\sigma(4,2) - 1/8\ \gamma\,\sigma(2,3) + 1/48\ \gamma^3\sigma(3,3) + 1/2\ \gamma\,\sigma(1,5) + \sigma(0,6) + 1/8\ \gamma^2\sigma(2,4)$$

$$H_1 = \sigma(0,3) + 1/2\ \beta\,\sigma(1,2) + 1/8\ \beta^2\sigma(2,1) - 1/8\ \beta\,\sigma(2,0) + 1/48\ \beta^3\sigma(3,0)$$

$$H_2 = 1/384\ \gamma^4\sigma(4,0) + 1/8\ \gamma^2\sigma(2,2) + 1/2\ \gamma\,\sigma(1,3) + \sigma(0,4) - 1/16\ \gamma^2\sigma(3,0) - 1/8\ \gamma\,\sigma(2,1) + 1/48\ \gamma^3\sigma(3,1)$$

$$H_3 = \gamma^3/48\ \sigma(4,0) + \gamma^2/8\ \sigma(3,1) + \gamma/2\ \sigma(2,2) + \sigma(1,3) - \gamma/3\ \sigma(3,0) - 5/12\ \sigma(2,1)$$

$$H_4 = 1/3840\ \gamma^5\sigma(5,0) - 1/64\ \gamma^3\sigma(4,0) + 1/16\ \gamma\,\sigma(3,0) - 1/16\ \gamma^2\sigma(3,1) + 1/384\ \gamma^4\sigma(4,1) - 1/8\ \gamma\,\sigma(2,2) + 1/48\ \gamma^3\sigma(3,2) + 1/8\ \gamma^2\sigma(2,3) + 1/2\ \gamma\,\sigma(1,4) + \sigma(0,5)$$

$$H_5 = 4/9\ \beta^3\sigma(3,0) + 9\ \sigma(0,3) + 2\ \beta^2\sigma(2,1) + 6\ \beta\,\sigma(1,2)$$

$$H_6 = -1/9\ \delta\,\sigma(2,0) - 2/27\ \beta^2\sigma(3,0) + 1/27\ \beta\delta^2\sigma(3,0) - 4/243\ \beta^3\delta\,\sigma(4,0) + 4/3645\ \beta^5\sigma(5,0) + 1/18\ \delta^2\sigma(2,1) - 1/9\ \beta\,\sigma(2,1) + 2/27\ \beta^2\delta\,\sigma(3,1) - 2/243\ \beta^4\sigma(4,1) + 2/9\ \beta\delta\,\sigma(2,2) + 4/81\ \beta^3\sigma(3,2) + 2/9\ \beta^2\sigma(2,3) + 1/3\ \delta\,\sigma(1,3) - 2/3\ \beta\,\sigma(1,4) + \sigma(0,5)$$

$$T_1 = 8/15\ \beta^2\sigma(2,0) + 5/9\ \alpha^2\beta\,\sigma(3,0) + 125/2592\ \alpha^4\sigma(4,0) + 5/6\ \alpha^2\sigma(2,1) + 8/5\ \beta\,\sigma(1,1) + 12/5\ \sigma(0,2)$$

$$T_2 = 6/5\ \beta\,\gamma\,\sigma(2,0) + 5/8\ \alpha^2\gamma\,\sigma(3,0) + 2/3\ \alpha\beta^2\,\sigma(3,0) + 25/108\ \alpha^3\beta\,\sigma(4,0) + 125/10368\ \alpha^5\sigma(5,0) + 2\ \alpha\beta\,\sigma(2,1) + 9/5\ \gamma\,\sigma(1,1) + 25/72\ \alpha^3\sigma(3,1) + 3\ \alpha\,\sigma(1,2)$$

$$T_3 = 9/10\ \gamma^2\sigma(2,0) + 8/5\ \beta\delta\,\sigma(2,0) + 5/6\ \alpha^2\delta\,\sigma(3,0) + 16/45\ \beta^3\sigma(3,0) + 2\ \alpha\beta\gamma\,\sigma(3,0) + 5/9\ \alpha^2\beta^2\sigma(4,0) + 25/72\ \alpha^3\gamma\,\sigma(4,0) + 125/1296\ \alpha^4\beta\,\sigma(5,0) + 625/186624\ \alpha^6\sigma(6,0) + 8/5\ \beta^2\sigma(2,1) + 12/5\ \delta\,\sigma(1,1) + 3\ \alpha\,\gamma\,\sigma(2,1) + 5/3\ \alpha^2\beta\,\sigma(3,1) + 125/864\ \alpha^4\sigma(4,1) + 5/2\ \alpha^2\sigma(2,2) + 24/5\ \beta\,\sigma(1,2) + 36/5\ \sigma(0,3)$$

$$T_4 = 2/15\ \beta_{2}\varepsilon\,\sigma(2,0) + 1/5\ \gamma\delta\,\sigma(2,0) - 1/12\ \alpha\,\sigma(2,0) + 1/8\ \alpha\,\gamma^2\sigma(3,0) + 2/9\ \alpha\beta\delta\,\sigma(3,0) + 5/72\ \alpha^{2}\varepsilon\,\sigma(3,0) + 2/15\ \beta^2\gamma\,\sigma(3,0) + 25/648\ \alpha^3\delta\,\sigma(4,0) + 5/108\ \alpha^2\beta\,\gamma\,\sigma(4,0) + 4/81\ \alpha\beta^3\sigma(4,0) + 5/54\ \alpha^2\beta\,\gamma\,\sigma(4,0) + 125/10368\ \alpha^4\gamma\,\sigma(5,0) + 25/972\ \alpha^3\beta^2\,\sigma(5,0) + 125/46656\ \alpha^5\beta\,\sigma(6,0) + 3125/47029248\ \alpha^7\sigma(7,0) + 1/3\ \alpha\,\delta\,\sigma(2,1) + 2/5\ \beta\,\gamma\,\sigma(2,1) + 1/5\ \varepsilon\,\sigma(1,1) + 5/24\ \alpha^2\gamma\,\sigma(3,1) + 2/9\ \alpha\beta^2\,\sigma(3,1) + 25/324\ \alpha^3\beta\,\sigma(4,1) + 125/31104\ \alpha^5\sigma(5,1) + 2/3\ \alpha\beta\,\sigma(2,2) + 3/5\ \gamma\,\sigma(1,2) + 25/216\ \alpha^3\sigma(3,2) + \alpha\,\sigma(1,3)$$

$$T_5 = 1/6\ \delta^2\sigma(2,0) - 1/3\ \beta\,\sigma(2,0) + 2/9\ \beta^2\delta\,\sigma(3,0) + 2/81\ \beta^4\sigma(4,0) + 2/3\ \beta\delta\,\sigma(2,1) + 4/27\ \beta^3\sigma(3,1) + 2/3\ \beta^2\sigma(2,2) + \delta\,\sigma(1,2) + 2\beta\,\sigma(1,3) + 3\ \sigma(0,4)$$

$$T_6 = 2/3\ \beta^2\sigma(3,0) + 2\ \beta\,\sigma(2,1) + 3\ \sigma(1,2)$$

$$T_7 = 1/9\ \delta\varepsilon\,\sigma(2,0) - 1/4\ \gamma\,\sigma(2,0) + 2/27\ \beta^2\varepsilon\,\sigma(3,0) + 2/9\ \beta\gamma\delta\,\sigma(3,0) + 1/24\ \gamma^3\sigma(3,0) + 4/81\ \beta^3\gamma\,\sigma(4,0) + 2/9\ \beta\varepsilon\,\sigma(2,1) + 1/3\ \gamma\delta\,\sigma(2,1) + 2/9\ \beta^2\gamma\,\sigma(3,1) + 2/3\ \beta\gamma\,\sigma(2,2) + 1/3\ \varepsilon\,\sigma(1,2) + \gamma\,\sigma(1,3)$$

$$T_8 = 4/81\ \beta^3\sigma(4,0) + 2/9\ \beta\delta\,\sigma(3,0) + 1/3\ \delta\,\sigma(2,1) + 2/9\ \beta^2\sigma(3,1) + 2/3\ \beta\,\sigma(2,2) + \sigma(1,3)$$

$$T_9 = -1/9\ \beta\delta\,\sigma(3,0) - 2/81\ \beta^3\sigma(4,0) + 1/162\ \delta^3\sigma(3,0) + 1/81\ \beta^2\delta^2\sigma(4,0) + 2/729\ \beta^4\delta\,\sigma(5,0) + 4/32805\ \beta^6\sigma(6,0) - 2/27\ \beta^2\sigma(3,1) - 1/9\ \delta\,\sigma(2,1) + 1/27\ \beta\delta^2\sigma(3,1) + 4/243\ \beta^3\delta\,\sigma(4,1) + 4/3645\ \beta^5\sigma(5,1) + 2/243\ \beta^4\sigma(4,2) + 2/27\ \beta^2\delta\,\sigma(3,2) + 1/18\ \delta^2\sigma(2,2) - 1/9\ \beta\,\sigma(2,2) + 2/9\ \beta\delta\,\sigma(2,3) + 4/81\ \beta^3\sigma(3,3) + 2/9\ \beta^2\sigma(2,4) + 1/3\ \delta\,\sigma(1,4) + 2/3\ \beta\,\sigma(1,5) + \sigma(0,6)$$