La Tétralogique.

I) Le sixième problème de Hilbert.

David Hilbert

Mathématiques et physique : histoire d'un divorce.

L'époque où physiciens et mathématiciens marchaient main dans la main est révolue depuis le milieu du 19ème siècle. Du temps des Leibniz, Newton, Euler et autres Lagrange, physique et mathématiques étaient indissociablement liées par l'intérêt commun de résoudre des problèmes empruntés aux sciences naturelles. Les techniques de résolution mises en œuvre, dérivées, intégrales, etc, émargeaient à une vision géométrique des mathématiques (dérivée = pente, intégrale = surface, etc) qui convenaient à l'intuition des physiciens mais qui ont fini par indisposer les mathématiciens du fait des entorses à la rigueur qu'elles engendraient.

Les pratiques mathématiques en usage courant au 18ème siècle laissaient apparaître des zones d'ombres inquiétantes où la rigueur était absente, en particulier suite à un usage mal contrôlé de la notion d'infini. Il est bien connu qu'on s'expose à de graves désagréments lorsqu'on applique sans discernement aux quantités infinies des règles établies pour le seul calcul des quantités finies. Certaines aberrations sautent aux yeux :

$$1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1$$
$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0$$

D'autres, moins immédiatement détectables et cependant fréquentes dans toutes sortes de variantes, jouent dangereusement à permuter l'ordre de deux limites comme dans les exemples suivants : on a,

1) $lim_{\varepsilon\to 0}\, lim_{\eta\to 0}\, \dfrac{\varepsilon+\eta}{2\varepsilon+\eta}=\dfrac{1}{2}$ mais $lim_{\eta\to 0}\, lim_{\varepsilon\to 0}\, \dfrac{\varepsilon+\eta}{2\varepsilon+\eta}=1$

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}(-1)^k x^k e^{-x}dx\right)$ *diverge* mais $\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k e^{-x}\right)dx=0.596347\cdots$

3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\partial_\alpha\left(\frac{e^{-\alpha x}}{x}\right)dx=-\frac{1}{\alpha}$ mais $\displaystyle\partial_\alpha\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x}}{x}dx$ *diverge*

4) Le calcul des matrices finies ne fait aucune différence entre l'inverse à gauche et l'inverse à droite (elles coïncident) mais cela cesse d'être vrai lorsqu'on considère des matrices infinies comme les physiciens ont l'habitude de le faire en mécanique d'Heisenberg.

Les abus de ce genre n'ont absolument pas disparu des pratiques mathématiques en usage chez les physiciens. La théorie quantique des champs se débat sans scrupules extrêmes avec les manipulations douteuses de quantités infinies. Feynman, nous y reviendrons, a largement mis en garde sur ce point tout en ayant contribué lui-même à créer cet état de chose. Ses théories des diagrammes ou des intégrales de chemins créent de toutes pièces des séries divergentes, du genre de celle citée dans le deuxième exemple, que l'on fait reconverger par des manipulations ad hoc mais injustifiées. Cet état de chose ne résulte pas forcément d'une propension naturelle des physiciens à l'absence de rigueur mais plutôt d'approches inappropriées, en particulier perturbatives, qui créent de toutes pièces leurs propres problèmes.

C'est le milieu du 19ème siècle qui a sonné le divorce entre mathématiciens et physiciens. D'une part, parce que les mathématiciens ambitionnaient de plus en plus d'étudier des problèmes dépourvus de relation immédiate avec les sciences naturelles et d'autre part, parce qu'ils souhaitaient remplacer le cadre géométrique par un cadre arithmétique, jugé plus sûr. Cette restructuration en profondeur porte précisément le nom d'arithmétisation des mathématiques. Initiée par les mathématiciens de la génération de Cauchy, elle a culminé avec la présentation du programme de Hilbert.

Le formalisme Hilbertien.

Personne ne conteste que les mathématiques soient le langage naturel de la science, en général, et de la physique en particulier. Toutefois l'usage du pluriel dans un cas et du singulier dans l'autre est d'autant plus étrange, qu'en y regardant de plus près, on arrive plutôt à la conclusion qu'on devrait parler de la mathématique et des physiques. Le statut de ces deux sciences est en effet très différent à plusieurs égards.

Dans le cadre de son programme d'arithmétisation, les mathématiques se sont restructurées autour du programme d'Hilbert. Ce programme a consisté à développer les mathématiques dans une grande diversité de systèmes formels plus ou moins sophistiqués puis, ultérieurement, à les regrouper dans le cadre unifié de la théorie des ensembles. Hilbert a, en particulier, préconisé que chaque fragment mathématique, géométrie, arithmétique, algèbre, analyse, etc …, coïncide avec la clôture logique d'un ensemble d'axiomes.

L'intérêt d'un cadre formel est triple. D'abord, il traduit cette exigence naturelle qu'il est illusoire de prétendre construire quelque chose à partir de rien. Ensuite, il garantit qu'aucune hypothèse extérieure au système ne vient polluer les développements logiques et enfin, il prévient, par la rigueur de ses développements, l'improvisation de raisonnements douteux.

Le principe du fonctionnement d'un système formel est toujours le même : on admet sans discussion un ensemble de théorèmes de base, appelés axiomes, et on en déduit des théorèmes de plus en plus évolués par applications répétées des règles logiques en usage. Cette logique étant elle même codifiée par un ensemble d'axiomes, l'adopter revient à ajouter la liste de ses axiomes à celle du système étudié. On peut également concevoir cette logique comme le langage dans lequel le système exprime ses propositions.

Par logique en usage, on entend habituellement mais pas obligatoirement la logique classique binaire du premier ordre. « Binaire » signifie que toute proposition pour laquelle il fait sens de parler de vérité ou de fausseté est nécessairement vraie ou fausse. « Du premier ordre » signifie que le langage logique englobe les notions de constantes, de variables, de fonctions, de prédicats booléens, de connecteurs logiques (non, et, ou, implique, ssi, …), d'identité (=) et de quantificateurs existentiel, $\exists$, et universel, $\forall$. Ces derniers ne peuvent porter que sur les constantes et les variables mais pas sur les fonctions ni sur les prédicats car cela est réservé aux logiques d'ordres supérieurs. La logique du premier ordre permet d'exprimer toutes sortes de nuances telles celles-ci :

$\forall x \forall y : ((x = y) \Rightarrow (Fx \Leftrightarrow Fy))$ "Si x et y sont identiques, tout prédicat vrai pour x l'est pour y"

$\exists x \exists y : (Fx \wedge Fy \wedge \neg(x = y))$ "Le prédicat F peut être satisfait d'au moins deux façons distinctes"

$\forall x \forall y : ((Fx \wedge Fy) \Rightarrow x = y)$ "Le prédicat F ne peut être satisfait que d'une seule façon "

etc… .

La logique du premier ordre n'est cependant pas toute puissante. Elle est, par exemple, incapable de faire la distinction entre le fini, le dénombrable ou le non dénombrable. Ainsi les propositions suivantes ne sont pas formalisables dans une logique du premier ordre :

"Le prédicat F ne peut être satisfait que d'un nombre fini de façons "
"Le prédicat F ne peut être satisfait que d'une infinité dénombrable de façons "
"Le prédicat F peut être satisfait d'une infinité non dénombrable de façons "

Un système formel est dit élémentaire s'il exprime ses propositions dans le langage de la logique classique du premier ordre et qu'il n'introduit aucun axiome propre relatif à l'infini.

Tous les systèmes ne sont pas élémentaires. Tout système qui s'exprime dans un langage d'ordre deux ou plus est dit non élémentaire (synonyme = étendu). De même tout système qui s'exprime dans une logique du premier ordre et qui introduit ses propres axiomes relatifs à l'infini est également non élémentaire, l'exemple le plus fameux étant la théorie des ensembles telle qu'axiomatisée par Zermelo et Fraenkel (ZF). C'est aussi le cas de tous les systèmes qui font appel aux ressources de l'analyse infinitésimale au travers de la notion de continu. Ainsi la géométrie euclidienne élémentaire peut traiter les questions relatives aux points, aux droites et aux angles, typiquement les premiers livres d'Euclide, mais elle est incapable de procéder aux calculs de longueurs de courbes, de surfaces ou de volumes qui nécessitent des opérations de passages à la limite. Seule une géométrie étendue peut y parvenir. On retrouve le même genre de problématique en arithmétique où il n'est pas rare que l'on soit obligé de sortir du système de Peano pour démontrer des théorèmes qui ne concernent que les entiers avec l'aide de l'arsenal de l'analyse infinitésimale. L'exemple de la démonstration récente du grand théorème de Fermat est fameux.

Le cadre axiomatique des théories mathématiques.

Les premières tentatives d'axiomatisation de fragments mathématiques furent l'œuvre de Boole et Frege dans le cadre de la logique pure. Hilbert a ensuite axiomatisé la géométrie sur base d'une vingtaine d'axiomes puis Peano a axiomatisé l'arithmétique et d'autres ont emboîté le pas. Tout système formel repose sur l'existence des éléments suivants :

- Un alphabet composé d'un nombre fini de symboles quelconques, {1, 2, …, a, b, c, …, *, (,), …} que l'on peut assembler pour former des « mots » de longueurs obligatoirement finies sans qu'il y ait de limite à cette longueur. Soit, Λ, l'ensemble, a priori infini mais dénombrable, de tous les mots concevables.

- Le sous-ensemble, $L \subseteq \Lambda$, des mots (synonymes : énoncés, propositions) acceptables (synonyme : bien formés) parce qu'on les considère porteurs de sens dans le système considéré. Ils forment un langage dont la grammaire de formation, G_f, est habituellement de type hors contexte. Parmi tous les mots acceptables, il en est certains qui possèdent le statut particulier de théorème.

- L'ensemble, $A \subseteq L$, des propositions-axiomes du système. Les axiomes sont des propositions que le système admet sans discussion possible comme possédant le statut de théorème. L'ensemble, A, doit être décidable afin de pouvoir reconnaître la présence d'un axiome dans une preuve et certifier celle-ci. En théorie, il suffirait que A soit semi-décidable mais on peut montrer qu'un ensemble semi-décidable d'axiomes est ipso facto décidable.

- Une grammaire d'inférence, G_i (que l'on ne confondra pas avec G_f), composée d'un nombre fini, k, de règles d'inférence, r_i (i=1,…k), empruntées à la logique en usage. Ces règles agissent sur les théorèmes déjà formés, en particulier les axiomes, pour en fabriquer de nouveaux. Le syllogisme suffit en substance aux besoins logiques usuels même si on l'affuble de noms savants, Modus Ponens, Coupure, et autre Règle de substitution. Chaque théorème nouvellement dérivé possède une preuve qui est la suite proprement ordonnée des axiomes et/ou des règles d'inférence utilisés pour le déduire.

L'exemple de la théorie des groupes.

Voici, pour fixer les idées, l'exemple de la théorie des groupes qui permet une présentation simple et révélatrice. Réduite à sa plus simple expression, c'est-à-dire isolée au maximum du cadre de la logique du premier ordre, son axiomatisation s'effectue comme suit :

ax1 : $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$	associativité
ax2 : $a \circ e = a$	existence d'un élément neutre à droite
ax3 : $a \circ a^{-1} = e$	existence d'un inverse à droite

Cette formulation compacte ne doit pas abuser. Le troisième axiome est en fait une formulation abrégée qui sous-entend un recours à la logique du premier ordre, à savoir,

ax3 : $\forall a \exists b : a \circ b = e$

Voici une preuve du théorème qui affirme que, $a^{-1} \circ a = e$:

$$a^{-1} \circ a \underset{ax2}{=} a^{-1} \circ (a \circ e) \underset{ax3}{=} a^{-1} \circ (a \circ (a^{-1} \circ (a^{-1})^{-1})) \underset{ax1}{=} a^{-1} \circ ((a \circ a^{-1}) \circ (a^{-1})^{-1})$$

$$\underset{ax3}{=} a^{-1} \circ (e \circ (a^{-1})^{-1}) \underset{ax1}{=} (a^{-1} \circ e) \circ (a^{-1})^{-1} \underset{ax2}{=} a^{-1} \circ (a^{-1})^{-1} \underset{ax3}{=} e$$

Fragments et extensions.

Lorsqu'on modifie la liste des axiomes d'un système formel, on définit un nouveau système dont le pouvoir d'expression peut s'avérer plus ou moins riche. Envisageons séparément la suppression et l'ajout d'axiomes.

- *Suppression d'axiomes.*

Toute suppression d'axiomes crée un nouveau système qu'on nomme fragment du système primitif. Dans l'exemple de la théorie des groupes, on peut supprimer les axiomes 2 et 3 et il ne subsiste que le fragment de l'algèbre associative. Un autre exemple est celui de la géométrie absolue, fragment de la géométrie d'Euclide, qui résulte de la suppression du postulat des parallèles. Lorsqu'on passe du système primitif au système réduit, certaines propositions perdent fatalement leur statut de théorème. C'est trivialement le cas de l'axiome supprimé mais c'est aussi le cas de tous les théorèmes qui ne pouvaient se démontrer dans le système primitif sans invoquer cet axiome.

- *Ajout d'axiomes.*
Tout ajout d'axiome peut être tenté dans les contextes suivants :

1- Soit cet axiome dépend des axiomes existants, on veut dire par là qu'il s'en déduit dans le cadre du système étudié. Dans ce cas, l'axiome ajouté est clairement redondant et on n'a rien fait d'utile. C'est ce qui se passerait, dans l'exemple de la théorie des groupes, si on ajoutait la proposition, $a^{-1} \circ a = e$, à la liste des axiomes.

2- Soit cet axiome ne dépend pas des axiomes existants et deux possibilités se présentent à nouveau.

> 2.1- Soit l'adoption du nouvel axiome provoque une contradiction au sein du système formel suite à l'apparition d'une preuve pour une proposition et d'une autre preuve pour sa négation. Dans ce cas, le nouveau système doit clairement être rejeté comme incohérent (synonyme : contradictoire).
>
> 2.2- Soit rien de semblable ne se produit et on peut prendre en considération le nouveau système qui prend le nom d'extension du système de base. On le nomme ainsi parce que tous les théorèmes du système primitif conserve leur statut de théorème mais qu'il s'en ajoute de nouveaux puisque le cadre axiomatique est enrichi. Une extension est toujours plus riche en axiomes mais cela ne signifie pas que le système soit plus intéressant pour la cause. Dans l'exemple traité, l'ajout de l'axiome, $a = b$, rendrait le système fort peu intéressant puisqu'il ne décrirait plus que le groupe trivial à un seul élément. On voit qu'ajouter des axiomes à un système formel peut aller dans le sens de son enrichissement ou de son appauvrissement, voire de sa perte de cohérence. Chaque cas est un cas de figure et c'est précisément une des tâches du mathématicien de découvrir les "bons" ensembles d'axiomes, tout juste assez riches pour qu'il s'y passe quelque chose d'intéressant sans jamais mener à une quelconque contradiction lors du déroulement des théorèmes.

Si l'adjonction de théorèmes à la liste des axiomes est une opération théoriquement blanche, elle présente un intérêt pratique dans la variante suivante qui consiste à verser les théorèmes successivement démontrés dans un réservoir de lemmes. Cette technique permet de raccourcir certaines démonstrations en invoquant ces lemmes. Par exemple, on profiterait du fait que l'on a démontré, $a^{-1} \circ a = e$, pour raccourcir comme suit la démonstration du théorème, $e \circ a = a$:

$$e \circ a \underset{ax3}{=} (a \circ a^{-1}) \circ a \underset{ax1}{=} a \circ (a^{-1} \circ a) \underset{lemme}{=} a \circ e \underset{ax2}{=} a$$

On note qu'il s'agit d'un simple raccourcissement : on peut toujours se baser sur les seuls axiomes primitifs mais la démonstration comporterait dix étapes au lieu de quatre.

Strictement parlant, la technique du lemme présuppose l'adoption de la règle d'inférence logique communément admise du modus ponens, $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$, que l'on invoque comme suit dans ce cas précis :

$$((e \circ a) = a \circ (a^{-1} \circ a)) \wedge (a^{-1} \circ a) = e) \Rightarrow e \circ a = a$$

Le congrès de Bologne.

C'est au congrès de Bologne, en 1923, qu'Hilbert a posé trois questions fondamentales qui concernent tout système formel :

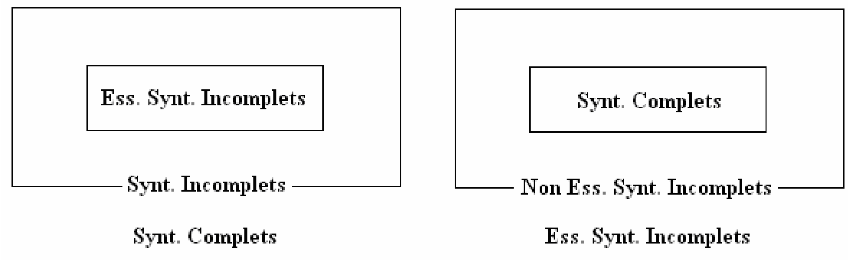
1) " Peut-on acquérir la certitude qu'un système formel est cohérent ? "
Un système formel est ***cohérent*** (synonyme : non contradictoire) si à aucun moment il ne prouve une proposition et sa contraire. Evidemment, il est incohérent (synonyme : contradictoire) dans le cas contraire. Il n'y a aucune limite à l'incohérence d'un système à tel point qu'on peut y démontrer tout et n'importe quoi. Il va de soi qu'un système incohérent doit être rejeté d'où l'intérêt de la question posée. Hilbert était convaincu qu'il devait être possible de prouver la cohérence ou l'incohérence de n'importe quel système formel, en particulier de ZF mais il avait tort. En effet, Gödel a prouvé que tout système, en particulier ZF, qui contient suffisamment d'arithmétique, typiquement l'arithmétique de Robinson, est incapable de prouver sa propre cohérence.

2) " Tout système formel peut-il être rendu syntaxiquement complet ? "
Un système formel est ***syntaxiquement complet*** si toute proposition sensée, A, y est prouvable ou réfutable, ce qui revient à dire que, quelle que soit A, il existe une preuve de A ou de non-A. Inversement, il est syntaxiquement incomplet s'il existe une proposition qui n'est ni démontrable ni réfutable dans de le cadre de ce système. Une proposition qui ne peut être ni prouvée ni réfutée dans le cadre d'un système formel s'appelle un ***indécidable*** de ce système. Il importe de comprendre que l'incomplétude syntaxique est tout à fait banale et Hilbert en était parfaitement conscient. Ainsi la géométrie d'Euclide, privée de l'axiome des parallèles, est banalement incomplète : tout ce qu'on arrive à y démontrer se limite à une trentaine de propositions intéressantes, présentes pour la plupart dans le premier livre des Eléments d'Euclide. Toutefois, il suffit de rétablir l'axiome manquant pour que le système redevienne syntaxiquement complet.

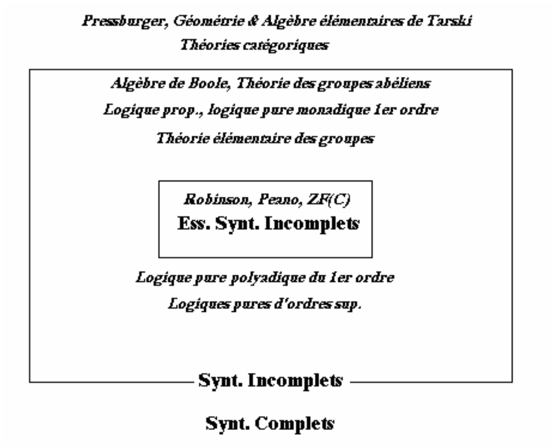
De même, le système de la théorie des groupes est syntaxiquement incomplet : par exemple, la proposition, $a \circ b = b \circ a$, n'y est ni prouvable ni réfutable sur la base des axiomes admis. La proposition, $a \circ b = b \circ a$, et sa négation sont donc des indécidables de la théorie des groupes. Si on ajoute l'axiome, $a \circ b = b \circ a$, à la théorie des groupes, on crée l'extension de la théorie des groupes commutatifs. Ce nouveau système contient encore des propositions indécidables, par exemple, $a = b$, et par conséquent, il demeure syntaxiquement incomplet. Il est cependant complétable et même de plusieurs manières distinctes. Il suffirait de lui adjoindre l'axiome, $a = b$, pour qu'il devienne le système syntaxiquement complet du groupe à un seul élément (pas terriblement excitant, nous en convenons, mais la question n'est pas là).

Répondre affirmativement à la deuxième question d'Hilbert, c'est énoncer que l'incomplétude syntaxique de tout système formel n'est jamais que provisoire et que ce n'est qu'une question de temps que quelqu'un trouve un jeu d'axiomes capables de compléter l'ensemble. Répondre négativement, c'est au contraire estimer que pour certains systèmes, la procédure de complétion ne s'arrête jamais : on a beau ajouter des axiomes, il subsiste toujours des propositions indécidables, impossibles à prouver ou à réfuter.

La réponse générale est, à nouveau, négative : Gödel, encore lui, a prouvé que tout système, en particulier ZF, qui contient l'arithmétique de Robinson est impossible à compléter, on dit qu'il est ***essentiellement syntaxiquement incomplet***. Les diagrammes complémentaires suivants fixent la notion d'incomplétude syntaxique.

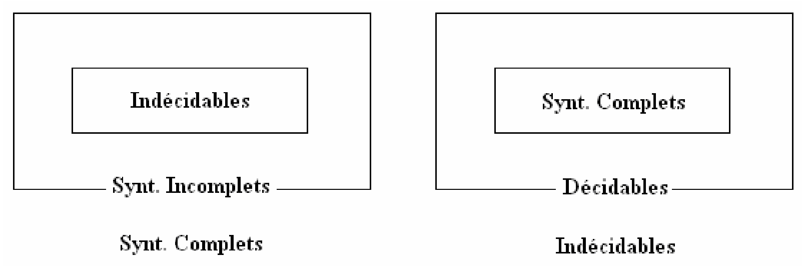


Il peut aider de situer quelques systèmes formels connus par rapport à la complétude syntaxique. Voici, pour fixer les idées et sans justification à ce stade, la localisation de quelques systèmes usuels dans trois zones : les systèmes syntaxiquement complets, ceux qui sont incomplets mais qui peuvent être complétés par adjonction d'un nombre fini ou récursivement énumérable d'axiomes et ceux qui sont essentiellement incomplets.

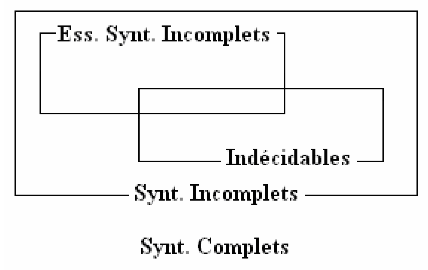


3) " Toute axiomatique formelle est-elle décidable? "

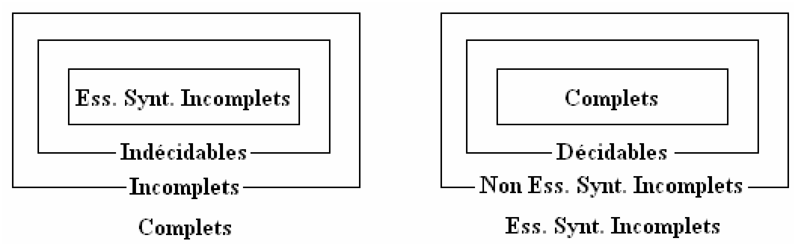
Par définition, un système formel est ***décidable*** s'il existe une ***procédure effective*** qui prend en entrée n'importe quelle proposition sensée qui y est formalisable et qui, après analyse, répond "Oui, cette proposition est prouvable" ou "Non, cette proposition n'est pas prouvable" dans le cadre de ce système. Cette question rentre donc dans la catégorie des problèmes de décision. Tout système formel syntaxiquement complet est décidable. La procédure de décision correspondante est connue sous le nom d'algorithme du British Museum et elle fonctionne comme suit. On commence par énumérer toutes les preuves dans l'ordre canonique ce qui ne pose pas de problème puisque l'ensemble des axiomes est récursivement énumérable. De fait, une preuve n'étant jamais qu'une succession ordonnée et finie d'invocations d'axiomes et de règles logiques, elles-mêmes en nombre fini, on peut, avec un peu de méthode, lister les preuves dans l'ordre des longueurs croissantes et à longueurs égales dans l'ordre lexicographique. En les passant toutes en revue, on a, à un moment ou à un autre, la certitude de tomber sur une preuve de A ou de non-A puisque par hypothèse de la complétude syntaxique, une de ces preuves existe à coup sûr. Par contre, lorsque le système formel est syntaxiquement incomplet, on n'a plus aucune garantie que la procédure de décision sera effective. Elle échouera, de fait, toutes les fois qu'on lui soumettra une proposition qui n'est ni prouvable ni réfutable. Dans le cas d'un système syntaxiquement incomplet deux cas sont donc effectivement possibles. Soit la procédure de décision fonctionne soit elle n'est plus qu'une procédure de semi décision. Dans ce deuxième cas elle répond certainement oui toutes les fois que la proposition soumise est un théorème sinon elle parcourt interminablement la liste des preuves sans que l'on sache si l'absence d'arrêt de la procédure est due à la non théorémicité de la proposition considérée ou au fait que la preuve est beaucoup plus longue que prévu. Augmenter le temps d'attente ne résout pas ce dilemme lorsque la preuve cherchée n'existe pas. De toute évidence, la situation des théorèmes et des non-théorèmes n'est pas symétrique.



Les systèmes formels indécidables existent bel et bien et la réponse à la troisième question posée par Hilbert est à nouveau négative. Il est, à présent, possible de fusionner les diagrammes précédents en un seul ce qui donne, sans réfléchir outre mesure :



Les choses sont en réalité plus simples dans la mesure où aucun système décidable n'est en même temps essentiellement syntaxiquement incomplet. Les diagrammes corrects et complémentaires sont donc les suivants :



Nous positionnerons, le moment venu, divers systèmes usuels dans chacune des zones ainsi définies.

Echec à la trivialisation des mathématiques.

Les réponses négatives aux trois questions posées par Hilbert, en particulier la troisième, ont provoqué un émoi variable dans la communauté mathématique. Chaitin a largement ironisé sur le fait qu'Hilbert ait réellement pu croire à l'existence d'une procédure effective de décision applicable à n'importe quel système formel y compris à la théorie des ensembles, ZF. Autant dire, si cela était vrai, que la pratique mathématique serait intégralement mécanisable : l'étude de n'importe quel système formel pourrait être confiée à une machine dépourvue d'intelligence qui imprimerait les théorèmes, en gros, dans l'ordre des longueurs de preuves croissantes. Au début, on imagine qu'elle consommerait des kilos de papiers en imprimant des théorèmes peu intéressants, encore trop proches des axiomes de base donc intuitivement évidents mais, à mesure que la machine envisagerait tous les cas possibles, on pourrait raisonnablement s'attendre à en découvrir d'autres nettement plus subtils. Dans une telle optique, il n'y aurait plus aucun besoin du secours de l'intuition qui guide habituellement le travail du mathématicien.

Il semble que cette idée de trivialisation des mathématiques n'effrayait pas Hilbert outre mesure. Après tout, cette machine à démontrer des théorèmes serait totalement inefficace, l'âge de l'univers ne suffisant pas à dépasser une longueur de preuve même pas élevée. De plus, il restait quelques domaines de chasse protégés, tels la recherche d'ensembles cohérents et minimaux d'axiomes capables de générer des fragments formels intéressants ou la recherche de preuves courtes.

Ce n'est pas parce que le jeu d'échecs est déterministe, fini et formalisable sous la forme d'un arbre que l'on cesse d'y jouer. Il existe pourtant dans l'absolu une partie idéale où chaque joueur joue au mieux de ses intérêts. Evidemment, elle est provisoirement complètement hors d'atteinte que ce soit pour un humain ou pour un ordinateur et c'est la raison pour laquelle les amateurs continuent de se passionner pour ce jeu. Signalons quand même que le problème des dames anglaises, qui se jouent sur un damier 8x8, vient d'être résolu : lorsque les deux joueurs jouent au mieux de leur intérêt, la partie est inévitablement nulle.

A vrai dire, nous ignorons si Hilbert était prêt à se satisfaire d'une activité mathématique qui se serait contentée d'enrichir les systèmes formels existants par des ajouts d'axiomes tout en évitant de les rendre contradictoires. Ce qui est sûr, c'est les réponses négatives aux questions d'Hilbert, en particulier l'incomplétude et l'indécidabilité des systèmes suffisamment évolués, prouvent que l'activité mathématique ne pourra jamais se passer du secours de l'intuition.

Il est possible qu'Hilbert se soit laissé abuser par les rapports que l'activité mathématique entretient quotidiennement avec la notion d'évidence. Le raisonnement classique suivant, qui démontre l'irrationalité de $\sqrt{2}$, illustre ce propos. Si $\sqrt{2}$ était rationnel, il existerait une fraction réduite, p/q, égale à $\sqrt{2}$. On aurait alors que : $p^2 = 2q^2$. L'entier p serait donc pair, soit, p = 2m, avec m entier. On devrait donc pouvoir écrire : $p^2 = 2q^2$. Il en résulterait que q serait aussi pair donc divisible par 2, ce qui est impossible puisque nous avons, dès le départ, simplifié la fraction p/q. Ce raisonnement mène à une contradiction dont l'origine ne peut se trouver que dans la seule hypothèse introduite dans le raisonnement, à savoir l'existence de p et q, entiers, tels que p/q = $\sqrt{2}$. Cette courte démonstration ne comporte que des étapes « évidentes ». Seul leur enchaînement peut donner le tournis au lecteur mais la conclusion demeure qu'une succession d'étapes évidentes ne font, au total, qu'une démonstration évidente. C'est donc parce qu'il faut enchaîner un grand nombre d'étapes logiques élémentaires que le théorème perd son caractère évident pour l'intelligence humaine. Hilbert croyait à tort que tout problème était prouvable ou réfutable par une succession d'évidences de ce type. C'était sans compter sur la troisième voie de l'indécidabilité.

Notion de Vérité et problèmes d'interprétations.

De tous temps, les logiciens se sont méfiés de la notion de vérité qui est à l'origine de paradoxes d'autant plus irritants que la logique ambitionne naturellement de codifier le raisonnement valide.

- La proposition, syntaxiquement correcte, « Je ne suis pas vraie dans Σ », ne peut être ni vraie ni fausse dans Σ car dans les deux cas une contradiction surgit qui est connue depuis l'antiquité sous l'appellation de paradoxe du menteur.

- Par contre la proposition, syntaxiquement correcte, « Je ne suis pas prouvable dans Σ », ne mène à aucune contradiction de ce genre : elle n'est tout simplement pas prouvable et elle est donc vraie.

La logique binaire classique postule qu'une proposition est obligatoirement vraie ou fausse. L'étude syntaxique des systèmes formels enseigne que toute proposition sensée y est nécessairement prouvable, réfutable ou indécidable. Une conclusion s'impose : les doubles inférences, $Prouvable \Leftrightarrow Vrai$ et $Réfutable \Leftrightarrow Faux$, ne sont pas tenables en toute généralité.

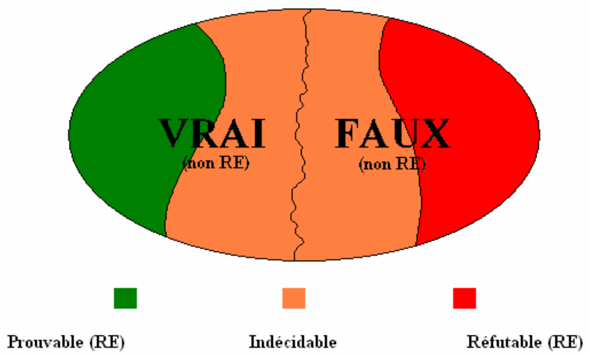
Etant donné que personne n'est prêt à considérer un système formel qui prouverait des propositions fausses ou réfuterait des propositions vraies, il ne reste qu'une seule possibilité, à savoir :

$$\begin{array}{ccc} Prouvable \Rightarrow Vrai & & Vrai \not\Rightarrow Prouvable \\ & \text{mais} & \\ Réfutable \Rightarrow Faux & & Faux \not\Rightarrow Réfutable \end{array}$$

que l'on peut comprendre comme la conséquence des identités suivantes qui expriment qu'au contraire de la vérité, la prouvabilité ne commute pas avec la négation :

$$\begin{array}{ccc} \neg Vrai = Faux & & \neg prouvable = réfutable \vee indécidable \\ & \text{mais} & \\ \neg Faux = Vrai & & \neg réfutable = prouvable \vee indécidable \end{array}$$

Vérité et prouvabilité sont donc deux notions qui ne se recouvrent pas. Cette constatation est largement comprise actuellement mais elle ne l'était pas à l'époque de Gödel et c'est assurément à mettre à son crédit de ne pas être tombé dans le piège de confondre ces deux notions.



C'est en fait la prouvabilité qui est formalisable au sein d'un système formel, pas la vérité. Pour pouvoir évoquer la notion de vérité, il faut entrer dans le mécanisme des interprétations possibles du système formel. Un système formel, Σ, impose un ensemble d'axiomes à un ensemble d'objets mais il ne précise pas concrètement la nature de ces objets ni celle des opérations auxquelles il les soumet. Le rappel de l'exemple du système formel de la théorie des groupes est utile à ce stade :

ax1 : $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ associativité
ax2 : $a \circ e = a$ existence d'un élément neutre à droite
ax3 : $a \circ a^{-1} = e$ existence d'un inverse à droite

Le niveau syntaxique n'impose aucune signification particulière aux symboles littéraux, a, b, c et e. Ce peuvent être des entiers, des rationnels, des polynômes, des matrices 2x2 d'entiers, etc. De même l'opérateur, $\circ$, ne possède pas de signification précise à ce stade. Seul le signe d'identité, =, signifie toujours que l'on peut à n'importe quelle étape d'une démonstration remplacer indifféremment un membre qu'il sépare par l'autre. Cette diversité dans les interprétations fait tout l'intérêt de l'étude syntaxique des systèmes formels : elle permet de démontrer des théorèmes pour toutes sortes de théories qui ont en commun le même ensemble axiomatique sans qu'on soit obligé de recommencer le travail à chaque fois.

Interpréter le système dans le domaine de sa sémantique c'est justement préciser les significations laissées en suspens au niveau syntaxique, en particulier les domaines d'appartenance des littéraux. Voici plusieurs interprétations possibles de la théorie des groupes parmi beaucoup d'autres. Elles ont toutes en commun d'interpréter la constante, e, comme l'entier, 0, et l'opérateur, $\circ$, comme l'addition habituelle. Par contre, les domaines d'appartenance des littéraux, a, b, c et e, varient : nous considérerons successivement les domaines, N_0 (les entiers non négatifs), Z (les entiers relatifs), Q (les rationnels) et R (les réels). Ces interprétations sont notées respectivement, $\{N_0, 0, +\}$, {Z, 0, +}, {Q, 0, +} et {R, 0, +}. Il est facile de voir que les deux premiers axiomes sont satisfaits dans toutes ces interprétations mais que le troisième est faux dans la première.

Un système formel peut donc accepter plusieurs interprétations, éventuellement une infinité. Certaines interprétations ne diffèrent pas fondamentalement, on dit qu'elles sont isomorphes. C'est le cas de {Z, 0, +} et de {Q, 0, +} entre lesquelles une correspondance biunivoque parfaite peut être établie. Par contre, {Q, 0, +} et {R, 0, +} ne sont pas isomorphes puisque Q et R sont de cardinaux différents. Il n'est pas interdit que deux interprétations se contredisent sur le caractère de vérité d'une proposition donnée à condition que cette proposition soit un indécidable du système. Evidemment, une interprétation n'est digne de considération que si les axiomes sont vrais dans cette interprétation qui prend alors le nom de modèle de la théorie.

Considérons l'ensemble des axiomes de Σ. Une interprétation, $\Im$, est un ***modèle*** de Σ si tous les axiomes sont vrais dans cette interprétation. {Z, 0, +}, {Q, 0, +} et {R, 0, +} sont des modèles de la théorie des groupes ce que n'est pas $\{N_0, 0, +\}$.

La théorie des groupes finis d'ordre, p, est particulièrement riche en modèles. C'est ainsi, qu'à un isomorphisme près, il n'existe qu'un seul groupe fini d'ordre, p, premier. Si p est le carré d'un nombre premier, il en existe deux et ce nombre passe à cinq si p est le cube d'un nombre premier. Si p est le produit de deux nombres premiers, q et r, il en existe deux si q divise r-1 et un seul sinon. Cela dit, il n'existe aucune formule générale donnant le nombre de groupes finis d'ordre p non isomorphes et l'ordinateur s'est même révélé indispensable pour débrouiller la structure de certains groupes dits sporadiques dont le plus monstrueux compte 808017424794512875886459904961710757005754368000000000 éléments! Cette richesse de comportement est en rapport avec le fait que la théorie des groupes est essentiellement syntaxiquement incomplète et même universelle au sens de Gödel ce qui, nous le verrons le moment venu, la situe sur un pied d'égalité avec l'arithmétique de Robinson et la théorie des ensembles. La classification des modèles de la théorie des groupes est un problème ardu qui continue d'occuper les mathématiciens. L'extension abélienne de la théorie des groupes, obtenue en ajoutant l'axiome de commutativité, $a \circ b = b \circ a$, est beaucoup moins riche et la classification des groupes commutatifs est facile à faire. De ce fait, la théorie des groupes commutatifs n'est pas universelle, elle est d'ailleurs décidable.

Un système formel qui ne possède aucun modèle est ***inconsistant***. Un système inconsistant est inutilisable vu qu'il est impossible de trouver un univers où ses axiomes sont tous vrais.

$$\begin{array}{ccccccc}
\Sigma & \Im_1 & \Im_1 & \cdots & M_1 & M_2 & \ldots \\
ax_1 & V & V & \cdots & V & V & \ldots \\
ax_2 & F & V & \cdots & V & V & \ldots \\
ax_3 & V & F & \cdots & V & V & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Un système formel qui possède un seul modèle (à un isomorphisme près) est consistant et syntaxiquement complet. L'incomplétude syntaxique ne surgit que lorsque le système possède plusieurs modèles non isomorphes en désaccord sur la vérité de certains énoncés. Comme il est exclu qu'un système formel démontre une proposition fausse, ces énoncés ne peuvent qu'être des indécidables du système formel qui est donc bien syntaxiquement incomplet. Inversement, un système syntaxiquement complet ne possède qu'un seul modèle (à un isomorphisme près).

C'est donc dans le cadre d'une interprétation particulière que toute proposition reçoit un attribut de vérité ou de fausseté selon qu'elle est satisfaite ou non dans le contexte défini par cette interprétation. Au niveau sémantique, toute proposition se trouve nécessairement dans l'un des cas suivants :

- Une proposition est ***insatisfaisable*** si elle est fausse dans toutes les interprétations et elle est ***satisfaisable*** si elle est vraie dans une interprétation au moins.

- Une proposition est ***valide*** si elle est vraie dans toutes les interprétations.

- Une proposition est ***contingente*** si elle est fausse dans certaines interprétations et vraie dans d'autres.

Lorsqu'une proposition est contingente ou pire encore insatisfaisable, elle est fausse dans une interprétation au moins et on conçoit qu'il serait très mal venu qu'elle puisse être démontrée au niveau syntaxique. On résume comme suit les rapports entre validité et théorémicité.

Un système formel est ***sémantiquement complet*** si toute proposition valide est démontrable au niveau syntaxique. La plupart des systèmes ancrés dans une logique du premier ordre sont sémantiquement complets mais cela cesse d'être vrai aux ordres supérieurs.

Un système formel est ***correct (synonyme : adéquat)*** si toute proposition démontrable au niveau syntaxique est valide. Pour des raisons évidentes, on ne s'intéresse qu'aux systèmes corrects. Dans un système correct,

- Un ***théorème***, en particulier un axiome, est toujours une proposition valide.

- Un ***non-théorème*** est toujours une proposition insatisfaisable.

- Un ***indécidable*** est toujours contingent : on peut trouver une interprétation où il est vrai et une autre où il est fausse. Dans l'exemple de la théorie des groupes, la proposition, $a \circ b = b \circ a$, est indécidable : elle est effectivement vraie dans l'interprétation, {Z, 0, +}, mais elle est fausse dans l'interprétation où le domaine Z est remplacé par celui des matrices 2x2 peuplées dans Z.

La séparation entre les niveaux syntaxique et sémantique est l'œuvre de Tarski. Avec le recul du temps, on comprend bien que la notion de vérité soit nécessairement prisonnière d'un environnement sémantique. Quel sens y aurait-il à exiger de classer comme vraie ou fausse la proposition qui affirme que "Les martiens sont verts"? L'utiliser c'est donc accorder un crédit particulier à une interprétation particulière et c'est prendre le risque qu'elle ne colle pas à la réalité du monde sensible. L’usage que le physicien pourrait être tenté de faire de la notion de vérité ne devrait pas échapper à ce principe de précaution. L’histoire est d’ailleurs parsemée d’exemples d’une théorie qui paraissait bien établie et qui n’a pu éviter de profondes révisions dans les siècles qui suivent. Il serait bien surprenant que cette situation change radicalement dans un avenir proche.

Mathématiques ou mathématique?

Il semblerait, à première vue, que l'adoption du programme formel d'Hilbert ait pour conséquence de rendre les mathématiques plurielles, morcelées en autant de fragments que de systèmes formels individuels. C’est pourtant tout le contraire.

Hilbert était convaincu qu'il devait être possible d'unifier tous les fragments mathématiques dans le cadre d'une extension qui engloberait toutes les mathématiques concevables. La toute jeune théorie des ensembles, telle que réaxiomatisée par Zermelo et Fraenkel, en abrégé, ZF, lui paraissait une candidate toute désignée à cette fin.

L'histoire des mathématiques est une course à l'extension de l'arithmétique Pythagoricienne au travers d'une généralisation progressive de la notion de nombre (entier, rationnel, irrationnel, algébrique, transcendant, réel, complexe, hypercomplexe). Il est communément admis que le stade final de cette évolution est atteint avec la théorie unitaire des ensembles telle qu'axiomatisée par Zermelo et Fraenkel (ZF). Quelques extensions restent possibles et ont d'ailleurs été tentés par l’ajout d’axiomes tel, on y reviendra, celui du choix mais le fait demeure que ZF répond aux besoins essentiels d'expressivité des mathématiques.

Toute extension axiomatique augmente la puissance expressive de la théorie et le risque potentiel d’incohérence mais c’est un pari que les mathématiciens acceptent de faire pour faciliter certaines démonstrations apparemment hors d’atteinte sans cela. Quoi qu’il en soit, il est admis que ZF est une théorie unitaire qui décrit correctement la mathématique.

Le 6ème problème d'Hilbert.

Nous avons déjà évoqué la liste de 23 problèmes qu'Hilbert a présentés, au congrès de Paris comme autant de défis à relever par la communauté mathématique du 20ème siècle. Le problème qui occupe la sixième place dans cette liste s'énonce comme suit :

"Peut-on axiomatiser la physique théorique ?"

Par cette question, Hilbert manifestait son intention d'intégrer la physique théorique dans le cadre mathématique du système formel que la Nature aurait choisi pour la description du monde inanimé.

Il peut paraître étrange que les mathématiciens aient à se mêler de faire de la physique alors qu'ils étaient les artisans principaux d'un divorce évoqué par ailleurs mais c'était pourtant une idée qu'Hilbert poursuivait car il ambitionnait d'exporter en physique la méthode formelle qu'il jugeait d'un grand avenir en mathématiques.

Le rêve d'une physique unitaire.

Les physiciens ont toujours envié leurs collègues mathématiciens qui disposent d'un modèle unitaire viable. Malheureusement leur situation paraît bien moins favorable à cet égard et il est tout à fait étrange que l'on continue de parler de la physique alors que toute son histoire tend à prouver qu'un pluriel reflèterait beaucoup mieux la réalité des choses. Les physiques sont, de fait, un conglomérat de théories éparses induites au départ de constatations expérimentales. Chaque fragment définit des grandeurs supposées pertinentes et des équations d'évolution mais leur ensemble ne s'insère pas actuellement dans un modèle unique.

On appelle « Physique unitaire » le système formel qui affranchirait la physique du cadre inductif et l'axiomatiserait à la manière de ce qui se fait en mathématiques.

Hilbert avait à peine formulé le sixième problème qu'il fut retiré de la liste. Ce n'était pas tant sa faute que la conséquence de l'explosion de bribes de théories physiques plus ou moins incompatibles qui a marqué les trente années qui ont suivi. Il avait posé son problème au Congrès de Paris de 1900 à une époque où la physique se partageait en deux blocs apparemment achevés : d'une part la mécanique Newtonienne qui semblait régler l'évolution du système solaire et d'autre part l'électromagnétisme Maxwellien qui paraissait apporter la clef d'une théorie satisfaisante des phénomènes électriques et lumineux. On avait bien remarqué que les deux théories étaient en désaccord sur leurs propriétés d'invariance spatio-temporelles mais cela était ressenti comme un obstacle mineur qui ne devait pas décourager d'espérer parvenir rapidement à une compréhension unifiée de l'univers. De fait, la théorie de la relativité a paru d'emblée aller dans le bon sens en proposant une modification de la théorie Newtonienne qui la remettait en phase avec l'électromagnétisme.

Par contre la révolution quantique, consécutive à l'étude expérimentale de l'infiniment petit, a érigé un obstacle inattendu à l'unification espérée. La physique quantique se distingue de son homologue classique par le fait qu'elle s'exprime dans une logique non binaire. Dans cette logique, évoquée par ailleurs et dont les premiers pas ont été faits par Birkhoff et von Neumann, une proposition ne doit plus nécessairement être vraie ou fausse, elle peut être un mélange des deux. Réconcilier dans un cadre unique la relativité générale et la mécanique quantique pose dès lors des difficultés non surmontées actuellement. Au bilan, loin de nous rapprocher du cadre unitaire espéré, le 20ème siècle nous en a, à regret, éloigné.

Au fond, l'erreur d'Hilbert était de raisonner en mathématicien comme si les physiciens étaient en mesure d'énoncer les bases axiomatiques d'une physique unifiée et cohérente. Il feignait d'ignorer que les mathématiciens jouissent, en sciences, d'un statut particulier, réellement exceptionnel, dans la mesure où ils ne connaissent que les contraintes d'ordre logique. Ils sont libres de définir les êtres de leur choix, auxquels ils prêtent quelques propriétés de base non contradictoires qui constituent le cadre axiomatique de leur théorie, il ne leur reste plus qu'à étudier les propriétés de l'univers clos ainsi défini. Pourvu qu'ils ne commettent aucune entorse à une logique, ils n'ont de compte à rendre à personne. Nul ne les chicanera jamais quant à l'intérêt que présente leur travail et l'histoire est riche d'exemples où un modèle qui paraissait futile a fini par trouver des applications inattendues, qu'on songe à la factorisation des entiers de plusieurs centaines de chiffres qui est à la base des systèmes cryptographiques les plus sûrs connus à ce jour.

La position des physiciens est, hélas, nettement moins confortable : ils sont en effet confrontés à la tâche beaucoup plus délicate de découvrir le cadre axiomatique de la meilleure théorie qui est capable de décrire notre univers concret et d'en prédire correctement l'évolution temporelle. En résumé, aux contraintes logiques qui subsistent évidemment, viennent se superposer celles qui résultent de la prise en compte de la réalité expérimentale.

Un point préoccupant est certainement que la physique théorique soit pour l'essentiel restée en l'état qu'elle connaissait vers 1960. Tout ce qui a suivi n'est plus que le remâché de recettes qui ont fonctionné dans quelques domaines spécifiques et ce n'est pas cela qui nous rapprochera de la théorie unitaire tant convoitée. On nous promet depuis 25 ans que la théorie des cordes va tout arranger mais cette durée même ressemble fort à la preuve du contraire : qu'il suffise de rappeler qu'une fois lancée, l'idée de la mécanique quantique s'est développée et est arrivée à maturité en quelques années à peine.

Les mille et une façons d'écrire la physique, un avis de R. Feynman.

Une question intéressante est de se demander si le chemin que nous suivons actuellement est susceptible de mener à un modèle unitaire de l'univers physique. Elle a, en particulier, été évoquée par un physicien éminent, R. Feynman. Dans un exposé, d'une rare honnêteté intellectuelle, prononcé lors de la remise de son prix Nobel, en 1965, celui-ci n'a pas hésité à montrer l'exemple en faisant la critique de l'œuvre majeure concernant l'électrodynamique quantique qui lui valait pourtant cette haute distinction. En voici deux extraits significatifs :

« … Many different physical ideas can describe the same physical reality. Thus, classical electrodynamics can be described by a field view, or an action at a distance view, etc. Originally, Maxwell filled space with idler wheels, and Faraday with fields' lines, but somehow the Maxwell equations themselves are pristine and independent of the elaboration of words attempting a physical description. The only true physical description is that describing the experimental meaning of the quantities in the equation - or better, the way the equations are to be used in describing experimental observations. This being the case perhaps the best way to proceed is to try to guess equations, and disregard physical models or descriptions. … I think the problem is not to find the best or most efficient method to proceed

to a discovery, but to find any method at all. Physical reasoning does help some people to generate suggestions as to how the unknown may be related to the known. Theories of the known, which are described by different physical ideas may be equivalent in all their predictions and are hence scientifically indistinguishable. However, they are not psychologically identical when trying to move from that base into the unknown. For different views suggest different kinds of modifications which might be made and hence are not equivalent in the hypotheses one generates from them in ones attempt to understand what is not yet understood. I, therefore, think that a good theoretical physicist today might find it useful to have a wide range of physical viewpoints and mathematical expressions of the same theory (for example, of quantum electrodynamics) available to him. This may be asking too much of one man. Then new students should as a class have this. If every individual student follows the same current fashion in expressing and thinking about electrodynamics or field theory, then the variety of hypotheses being generated to understand strong interactions, say, is limited. Perhaps rightly so, for possibly the chance is high that the truth lies in the fashionable direction. But, on the off-chance that it is in another direction - a direction obvious from an unfashionable view of field theory - who will find it? Only someone who has sacrificed himself by teaching himself quantum electrodynamics from a peculiar and unusual point of view; one that he may have to invent for himself. I say sacrificed himself because he most likely will get nothing from it, because the truth may lie in another direction, perhaps even the fashionable one."

Feynman était manifestement conscient qu'il n'y a pas qu'une manière d'écrire la physique et que celle que nous connaissons aujourd'hui n'est que le résultat de l'évolution particulière de notre histoire des sciences. Autrement dit, il serait très étonnant que les traités de physique extra-terrestre ressemblent aux nôtres car malgré l'hypothèse que les lois de la physique sont universelles, sans laquelle plus aucune science n'est envisageable, il paraît hautement probable que leur approche soit très différente à tous égards. Cela concerne tout autant le type de variables prises en considération pour la description des systèmes physiques que les mathématiques aptes à en décrire l'évolution temporelle. Nous-mêmes, sachant ce que nous savons, la réécririons–nous à l'identique si tout était à refaire?

Le monde digital.

Quel pourrait être le principe d'une révision des méthodes de la physique théorique? La deuxième moitié du XXème siècle a vu l'avènement de la numérisation tous azimuts. Pour la majorité des gens, le remplacement du modèle analogique par le digital ne concerne que le progrès ou le confort associés à une vie dite moderne. Même pour une majorité de scientifiques, l'ordinateur qui est l'exemple parfait de l'achèvement numérique, capable d'émuler tous les autres, n'est qu'un auxiliaire de travail, indispensable certes à l'exécution de tâches mécaniques, mais néanmoins fondamentalement auxiliaire.

Il pourrait paraître étrange d'envisager que ce modèle digital puisse envahir les sciences naturelles et singulièrement la physique théorique. C'est pourtant une éventualité qui a également été envisagée par Feynman.

On sait trop peu que Feynman a consacré les dix dernières années de sa vie à l'étude des systèmes discrets et, en particulier, aux limites naturelles des ordinateurs qu'ils soient classiques ou quantiques en rapport direct avec les lois fondamentales de la physique. On trouvera le compte-rendu du cours qu'il donna pour la première fois à Caltech en 1983 dans l'ouvrage incontournable intitulé, « Feynman lectures on computation ». Dans un article célèbre (Simulating physics with computers, J. Th. Physics, 21 (1982)), il n'hésite pas à émettre des doutes sur la pertinence d'une théorie qui use et abuse du continu au point de permettre une quantité infinie d'information dans un volume fini de l'espace-temps :

"Can physics be simulated by a universal computer? I would like to have the elements of this computer locally interconnected, and therefore sort of think about cellular automata as an example (but I don't want to force it). But I do want something involved with the locality of interaction. I would not like to think of a very enormous computer with arbitrary interconnections throughout the entire thing.

Now, what kind of physics are we going to imitate? First, I am going to describe the possibility of simulating physics in the classical approximation, a thing which is usually described by local differential equations. But the physical world is quantum mechanical, and therefore the proper problem is the simulation of quantum physics – which of simulation do I mean? There is, of course, a kind of approximate simulation in which you design numerical algorithms for differential equations, and then use the computer to compute these algorithms and get an approximate view of what the computer to compute these algorithms and get an approximate view of what physics ought to do. That's an interesting subject, but is not what I want to talk about. I want to talk about the possibility that there is to be an exact simulation, that the computer will do exactly the same as nature. If this is to be proved and the type of computer is as I've already explained, then it's going to be necessary that everything that happens in a finite volume of space and time would have to be exactly analysable with a finite number of logical operations. The present theory of physics is not that way, apparently. It allows space to go down into infinitesimal distances, wavelengths to get infinitely great, terms to be summed in infinite order, and so forth; and therefore, if this proposition is right, physical law is wrong."

Ces remarques indiquent clairement que pour Feynman, les rapports qu'entretiennent la physique et l'informatique théoriques ne sont nullement l'expression d'une convenance utilitaire mais, tout au contraire, qu'ils offrent un cadre digital au développement des sciences naturelles.

Les sciences naturelles, en particulier la physique, entretiennent des rapports profonds avec la notion de calcul. Lorsque nous filmons un système physique, au cours du temps, il semble que celui-ci calcule sous nos yeux sa propre évolution en temps réel. Cela est vrai d'une planète qui tourne autour de son étoile ou d'un atome qui émet des photons de fréquences toujours les mêmes. Tous ces calculs sont effectués sans erreurs et la question qui se pose aux scientifiques est, au fond, de savoir s'ils sont capables d'en faire autant.

On peut envisager de cerner la notion de calcul à plusieurs niveaux. Le niveau de base est le niveau humain, le seul que nous appréhendions avec plus ou moins de pertinence. La première tentative, apparemment réussie, de formalisation de la notion de calcul à ce niveau est due au mathématicien Turing. Il a couché sur le papier les plans d'un automate appelé depuis "Machine de Turing universelle", en abrégé MTU, qui est capable d'enchaîner l'ensemble des opérations mentales que l'homme effectue lorsqu'il calcule. Sa construction théorique sera détaillée ultérieurement et il suffit de savoir, à ce stade, que la MTU est implémentable physiquement au travers d'une architecture due à Von Neuman et que le résultat est connu sous le nom d'ordinateur universel.

Cet ordinateur est discret, classique et manufacturé. Par discret, on veut dire qu'il enchaîne une suite finie d'instructions en ne consommant qu'un espace mémoire fini quoique arbitrairement grand. Par classique, on entend que le système physique qui l'implémente respecte une logique binaire classique donc non quantique. Par manufacturé, on veut dire qu'une construction explicite nécessitant une intervention humaine est sans doute requise : personne à ce jour n'a jamais découvert un système physique qui, à l'état naturel, serait spontanément doué de calculabilité universelle. Que l'être humain constitue la seule exception connue à cette règle constitue le contenu informel de la thèse de Church-Turing.

Cette thèse affirme qu'il n'y a pas de différence entre ce que l'être humain, normalement constitué pour le calcul et qui possède une réserve inépuisable de papier brouillon, peut calculer et tout ce qui est calculable par une machine de Turing (ou un ordinateur). Il s'agit d'un acte de foi, impossible à justifier. Elle serait infirmée si quelqu'un arrivait à construire une machine capable d'effectuer un calcul qui laisserait l'ordinateur impuissant mais on n'a jamais rien trouvé de semblable et ce n'est pas faute d'avoir cherché. Si le nom de Church est généralement associé à celui de Turing, c'est que ce logicien avait quant à lui formalisé la calculabilité au travers de la notion de fonction récursive, également évoquée plus loin, et que sa démarche s'est avérée équivalente en tout point à celle de Turing.

Tous les scientifiques adhèrent à la thèse de Church-Turing. Il est essentiel de comprendre que celle-ci ne se prononce pas sur le fait que l'homme soit la référence absolue et universelle en matière de calcul et qu'aucun système naturel n'échappe à sa compétence calculatoire. Ceux qui pensent que tous les systèmes sont calculables par l'homme adhèrent à des versions plus fortes de cette thèse qu'on pourrait appeler "Thèses physiques de Church-Turing". Plusieurs niveaux sont possibles selon le degré de confiance que l'on fait à la MTU. C'est ainsi que l'on pourrait postuler :

1- qu'il est inutile de chercher à construire une machine de Turing continue en espérant lui faire calculer une fonction que l'ordinateur discret ne calculerait pas. Personne n'a jamais construit un ordinateur continu et il n'est même pas prouvé qu'il puisse en exister. Une telle machine devrait permettre d'encoder les données de tout problème et de décoder les résultats sans la moindre erreur dans le champ des réels : sauf preuve explicite du contraire, cela doit être considéré comme une utopie.

2- qu'il est inutile de construire une machine de Turing quantique en espérant lui faire calculer une fonction que l'ordinateur classique ne calculerait pas. On commence à construire, sur bases d'une architecture évoquée par ailleurs, des ordinateurs quantiques, non universels cependant. Non universel signifie qu'ils restent dédicacés à la résolution d'une catégorie de problèmes seulement. Ces ordinateurs calculent plus vite que n'importe quel ordinateur classique mais dans aucun cas il n'a été montré d'exemple où ils calculeraient quoi que ce soit que la version classique serait incapable de calculer. Feynman qui fut un pionnier dans ce domaine a toujours professé qu'il n'en existe pas et que l'ordinateur classique épuise bel et bien toutes les possibilités de calcul.

3- qu'il n'existe aucune perspective qu'un extra-terrestre dispose de moyens calculatoires supérieurs aux nôtres pour la simple raison que les limites que nous connaissons ne sont pas imputables à nos imperfections mais qu'elles se heurtent au constructivisme obligé des lois de la nature.

L'ordinateur respecte scrupuleusement le point de vue constructiviste en ne calculant que des nombres constructibles. La question se pose dès lors de savoir si la physique théorique ne tirerait pas le plus grand profit de l'adoption du même point de vue en restreignant volontairement le domaine d'appartenance des variables qui décrivent les systèmes au sous-ensemble des réels constructibles. Cette idée n'est pas neuve et on lui a objecté que l'ensemble des nombres constructibles au sens de Turing n'est pas clos par rapport à l'opération de passage à la limite. Nous pensons que cet argument est boiteux : il équivaudrait à faire rentrer par la fenêtre un non constructivisme qu'on a chassé par la porte. En effet, le passage à la limite est une opération typiquement héritée des méthodes de calculs propres à ZF, en particulier par le recours à des équations d'évolution de type différentielles. L'usage que nous faisons des équations différentielles nous paraît naturel parce que ce sont les mathématiques que nous avons apprises à l'université mais d'autres procédés de calcul existent, les récurrences ou les automates cellulaires par exemple, qui pourraient tout aussi bien faire l'affaire.

On obtient un modèle constructif du mouvement planétaire autour d'un centre fixe en remplaçant les équations différentielles par des équations aux différences finies (synonyme : récurrences). Ce modèle, explicité par ailleurs, préserve le caractère constructible des variables coordonnées initiales.

$$\vec{p}_i = m\sqrt{\frac{r_{i+1}}{2r_i}}\,\frac{\hat{r}_{i+1}+\hat{r}_i}{\sqrt{1+\hat{r}_{i+1}\cdot\hat{r}_i}} - \hat{r}_i\sqrt{m^2 - 2m\frac{\lambda}{r_i} + p_i^2}$$
$$\vec{p}_{i+1} = -m\sqrt{\frac{r_i}{2r_{i+1}}}\,\frac{\hat{r}_{i+1}+\hat{r}_i}{\sqrt{1+\hat{r}_{i+1}\cdot\hat{r}_i}} + \hat{r}_{i+1}\sqrt{m^2 - 2m\frac{\lambda}{r_{i+1}} + p_{i+1}^2}$$
$$t_{i+1} - t_i = r_{i+1} + r_i$$

Même sans se lancer dans de savants calculs, on vérifie que la constructibilité des données, m et λ, et des conditions initiales, $\vec{r}_0$, $\vec{p}_0$ et t_0, entraînent la constructibilité des variables, $\vec{r}_i$, $\vec{p}_i$ et t_i, à tous les stades, $i = 1,2,3,\cdots$, de l'évolution du système.

On pourrait contester que l'univers qui évolue conformément à des lois physiques ait à se soucier de la notion de calcul effectif mais cela reviendrait à poser qu'il pourrait enfreindre les limites calculatoires qu'il nous impose par ailleurs. Certes cela ne prouve rien mais condamner l'humain, donc le physicien, à des limites que l'univers ne connaîtrait pas rendrait fort inégal le combat que nous menons dans notre compréhension des lois de l'univers. Aucun scientifique ne devrait être prêt à accepter un point de vue aussi défaitiste.

Le statut de l'infini.

L'ordinateur moderne est l'exacte incarnation de la procédure effective, celle qui résout effectivement le problème qu'on lui soumet en n'utilisant que des ressources finies de temps et d'espace mémoire. Dans cette vision, il apparaît bien plus qu'un précieux auxiliaire de travail, c'est un système physique à part entière qui explore les limites de ce qui est calculable et qui nous resitue sainement par rapport à la notion d'infini.

S'il est un domaine où le constructivisme s'oppose au formalisme, c'est bien celui de l'acceptation de l'infini actuel. Tout problème qui a été formulé sur le papier dans ZF ne peut espérer voir à quoi sa solution ressemble qu'en revenant à l'arithmétique de Robinson (ou de Peano) dont le pouvoir calculatoire est universel : l'ordinateur classique travaille dans le cadre de cette arithmétique élémentaire, ni plus ni moins. Même lorsqu'il effectue une tâche aussi évoluée qu'un calcul formel en Mathematica, l'ordinateur ne sort pas de cette arithmétique.

Les informaticiens sont « naturellement » constructivistes car ils sont prisonniers de la thèse de Church et Turing : tant l'espace mémoire que le temps imparti aux procédures effectives sont finis, arbitrairement grand si cela s'avère nécessaire mais jamais infinis.

L'informatique est une branche que beaucoup de mathématiciens formalistes regardent avec dédain. Même si la situation est en train de changer, on voit en effet se développer dans le monde de véritables laboratoires de mathématiques expérimentales, le noyau dur des mathématiciens ignore ce courant qu'il considère comme secondaire. Aucun argument de type informatique ne convaincra jamais un mathématicien formaliste d'abandonner le cadre de la toute puissante théorie des ensembles sous le prétexte qu'elle prend en considération des notions qui sont inaccessibles aux procédure effectives exigées par le respect des contingences propres à notre univers sensible : cela ne fait tout simplement pas partie de ses préoccupations. Le système ZF intéresse les mathématiciens formalistes parce qu'il leur permet d'enrichir leur panoplie d'objets mathématiques et, grâce à cela, de démontrer plus vite certains théorèmes, l'exemple du grand théorème de Fermat est célèbre.

Quelle est ou quelle devrait être la position des physiciens par rapport au statut de l'infini? La réponse à la première question est facile : en optant pour un espace-temps continu, les physiciens ont clairement privilégié le cadre mathématique le plus général de la théorie des ensembles, ZF. Cela vient de ce qu'ils ont suivi attentivement la complexification progressive des systèmes formels, de l'arithmétique élémentaire à la théorie des ensembles, et qu'ils y ont vu un perfectionnement des outils mathématiques dont il eût été bien sot de ne pas profiter. Ce qu'ils n'ont pas apprécié à sa juste valeur, c'est qu'en optant pour le continu, ils renonçaient au point de vue constructiviste. La physique qui a pour vocation de s'intéresser à la description du monde sensible devrait, par principe, adhérer à ce point de vue or, en adoptant le cadre ZF, elle ne le fait pas.

Il est pourtant un domaine où les physiciens redeviennent naturellement constructivistes, c'est lorsqu'ils calculent la réponse numérique aux problèmes qu'ils se posent. Après tout, ces calculs passent tous, d'une manière ou d'une autre, par un programme discret qu'ils confient aux soins d'un ordinateur.

La physique statistique offre quelques exemples d'une théorie qui hésite sans cesse entre le discret et le continu. Certaines fonctions de partitions sont définies comme des sommes discrètes qu'aucune procédure connue ne permet de calculer exactement. Qu'à cela ne tienne, les physiciens remplacent ces sommes par des intégrales arguant du fait que le pas de sommation est suffisamment petit pour que la valeur de l'intégrale ne diffère pas sensiblement de celle de la somme. Enfin, lorsque l'intégrale est exprimée analytiquement, ils repassent à l'arithmétique discrète pour en estimer la valeur. Le point de vue constructiviste est clair à cet égard : il professe que le continu ne peut, à la rigueur, se justifier que comme approximation calculatoire commode du discret et non l'inverse.

Formalisme et constructivisme en rapport avec le statut d'existence des grandeurs.

Nous avons vu que le constructivisme prônait le respect de la procédure effective mais à l'origine, c'était surtout une position philosophique qui s'opposait au formalisme Hilbertien à propos du statut d'existence des objets mathématiques. Examinons l'objet de ce débat.

Pour Hilbert, adepte du formalisme, toute grandeur définie dans le cadre d'un système formel acquiert automatiquement le statut d'existence dès l'instant où elle n'est la source d'aucune contradiction interne. Tout le monde est bien d'accord que certains objets naturellement contradictoires n'existent pas, l'exemple suivant est célèbre.

« L'ensemble des ensembles qui ne font pas partie d'eux-mêmes », n'a aucune existence légale puisqu'il suffit de poser la question, « X fait-il partie de lui-même ? » pour comprendre que l'objet, X, est contradictoire quelle que soit la réponse apportée.

Par contre, le point de vue formaliste accepte sans sourciller la notion d'infini actuel, dénombrable ou non dénombrable, en particulier du continu, en justifiant son point de vue par le fait qu'on n'a jamais observé la moindre contradiction au sein du système formel, ZF, qui en fait un usage répété.

On pourrait objecter que ce n'est pas parce qu'on n'a pas encore trouvé de contradiction dans le système ZF qu'on n'en trouvera pas une un jour. Cette éventualité, qui serait tellement tragique que personne n'ose l'envisager, ne peut malheureusement pas être écartée car, ainsi que nous le verrons plus en détail, Gödel a prouvé que les systèmes formels « suffisamment évolués », en un sens qu'il faudra préciser, sont incapables de prouver leur propre cohérence. On peut éventuellement la prouver dans un système étendu mais ce n'est que reporter le problème sur celui de la cohérence de cette extension. La plupart des mathématiciens écartent cette objection avec dédain ou, plus simplement, ils l'ignorent par crainte de se condamner à l'immobilisme.

Bien que la grande majorité des mathématiciens adoptent le point de vue formaliste, il n'est pas le seul défendable : un point de vue différent, qualifié de constructiviste, a été défendu par Kronecker et Brouwer, que des disciples ont développé dans une multitude de variantes dont les subtilités ne nous concernent pas. Ils ne décernent un brevet d'existence qu'aux objets mathématiques qui peuvent être construits par une procédure effective. Autrement dit, le point de vue constructiviste remplace l'expression, « Il existe A tel que …» par cette autre : « On peut construire A par une procédure effective tel que …».

Brouwer proteste, en particulier, contre cette attitude qui consiste à admettre tout raisonnement qui ne mène à aucune incohérence subséquente. Il pense qu'une théorie incorrecte qui n'a pas encore été confrontée à une contradiction ne vaut pas mieux qu'un voleur qui n'a pas encore été pris. Son irritation est compréhensible quand on examine le raisonnement suivant, parfaitement valable pour tout mathématicien formaliste. "Etant donnée une propriété, P(n), il existe un entier, N, tel que si P(n) est vraie pour tout n≤N, alors elle est vraie pour tout n : il suffit de prendre pour N une exception à P s'il y en a une et n'importe quoi sinon"! Comme le commente Girard, ce raisonnement n'est que de la poudre de perlimpinpin jetée aux yeux. Brouwer a également protesté contre l'usage généralisé du principe logique du tiers exclu, en particulier dans les cas ou certaines propositions sont indécidables.

On pourrait penser que se quereller sur le statut d'existence des objets mathématiques est totalement stérile et juste bon à alimenter les conversations philosophiques de salon mais il suffit de transposer dans le domaine de la physique pour s'apercevoir que l'enjeu scientifique est plus grand que cela. La physique doit avoir pour vocation de s'occuper de décrire notre univers sensible et non un univers fictif. Le choix des grandeurs pertinentes à prendre en considération n'est dès lors pas du tout indifférent et on ne voit pas comment s'en sortir sans en référer aux enseignements de l'expérimentation. Malheureusement, cette idée n'est pas si simple à mettre en œuvre : comment décider sur des bases expérimentales qu'une grandeur existe objectivement et qu'elle doit faire partie intégrante de la théorie? Il ne suffit pas de répondre qu'il suffit que la grandeur soit mesurable car ce critère n'a de valeur incontestable que dans les cas rares où la mesure est directe et la plupart des mesures que l'on fait quotidiennement dans les laboratoires ne le sont pas.

Les physiciens ont fréquemment recours à un appareillage compliqué lorsqu’ils veulent mesurer avec précision des grandeurs inaccessibles à leurs sens. Cela entraîne hélas qu'il est rare, dans les domaines de pointe, que les résultats d'une expérience soient affranchis d'un modèle théorique particulier. Si cela est vrai, on comprend qu'il y a là un obstacle grave au jugement comparatif sain entre deux modèles théoriques compétitifs qui auraient, chacun à leur manière, inféodé l'expérience. Précisons notre pensée une fois pour toutes.

Si l'on désire mesurer la masse volumique d'un cylindre homogène, on devrait y parvenir, sans référence à un modèle partisan, en procédant aux mesures directes des paramètres nécessaires, masse et dimensions. Certes, le recours au cadre de la géométrie d'Euclide est sous-entendu mais elle fait, à l'échelle du laboratoire, l'objet d'un consensus tel, que sans lui, il n'y a plus rien moyen d'entreprendre.

Mais supposons que l'on décide de mesurer, par déflexion électrique, le rapport e/m qui concerne l'électron. Mesure-t-on réellement ce rapport? Evidemment la réponse est négative : on mesure la déviation du faisceau des électrons dans un champ, c'est-à-dire un angle, puis on tente de relier cet angle à la grandeur cherchée en se moulant dans le cadre des théories mécanique et électrique en vigueur et c'est très différent.

L'exemple choisi n'est sans doute pas trop grave car des mesures de la "même grandeur", basées sur d'autres principes, viennent recouper la valeur obtenue mais le principe demeure qu'il y a toujours un danger à mêler l'expérimentation à un modèle théorique particulier. Cela est particulièrement vrai dans tous les cas où le traitement des données expérimentales comporte des ajustements sur un grand nombre de paramètres car ces paramètres sont hérités d'une théorie particulière, ce qui ne leur garantit aucune existence légale. A la limite on pourrait, dans cet ordre d'idée, conférer des valeurs numériques à des grandeurs purement fictives et croire qu'elles ont, de ce simple fait, acquis droit de cité. Un exemple typique concerne toute une série de paramètres de désintégration des particules instables dont les "mesures" ne sont, en fait, que le résultat de l'ajustement d'un ensemble de paramètres que le modèle standard définit car il croit en leur existence. Or un ajustement de ce type fournit fatalement un résultat numérique. Quelle preuve peut-on en tirer de l'existence "réelle" de la grandeur paramétrée? Ce côté pervers de l'ajustement tous azimuts était déjà épinglé, non sans humour, au début du XX^{ème} siècle par l'illustre Henri Poincaré et la remarque qu'il faisait dans un contexte à peine différent n'a jamais perdu sa pertinence :

"*Il est clair qu'en donnant des dimensions convenables aux tuyaux de communication entre ses réservoirs et des valeurs convenables aux fuites, M. Jeans pourra rendre compte de n'importe qu'elle constatation expérimentale. Mais ce n'est pas là le rôle des théories physiques. Elles ne doivent pas introduire autant de constantes arbitraires qu'il y a de phénomènes à expliquer; elles doivent établir une connexion entre les divers faits expérimentaux et surtout permettre la prévision*".

Dans le même état d'esprit, la relativité générale et la mécanique quantique ont fait un sort à la notion de force qui paraît si naturelle dans l'édifice newtonien. C'est un bel exemple d'une grandeur qu'un modèle particulier définit et qui finit par croire en son existence "réelle" du simple fait qu'elle permet des prédictions intéressantes.