Introduction à l'étude des symétries des équations différentielles ordinaires.

Sophus Lie

Les travaux de Sophus Lie (vers 1870).

Les exposés élémentaires qui traitent des méthodes de résolution des équations différentielles (ou des systèmes) le font au coup par coup, accumulant un ensemble de recettes disparates où le flair, l'astuce ou la chance jouent un rôle prépondérant.

Une méthode systématique, si pas algorithmique, existe cependant depuis plus de 130 ans dont on ne fait curieusement guère état dans les programmes d'enseignement des deux premiers cycles universitaires. Certes, elle demeure impuissante en face de toute équation différentielle génériquement insoluble analytiquement mais si la solution existe, elle donne les meilleures chances de la trouver sans artifice ni intervention du hasard.

Cette méthode, due à Lie, et d'une réelle beauté, est basée sur l'étude des symétries des équations différentielles. Elle ne possède qu'un point faible qui l'a condamnée à un oubli provisoire : sa mise en oeuvre peut être lourde. L'apparition des logiciels de calcul formel a complètement changé la donne et il devient urgent de la diffuser, en particulier auprès des physiciens, qui ont largement été tenus dans son ignorance.

Cette présentation ne prétend nullement être complète. Elle ouvre l'accès au versant analytique de la théorie de Lie sacrifiant la rigueur à la clarté. Elle ne traite que les équations ordinaires mais il faut savoir que la méthode de Lie s'étend aux équations différentielles aux dérivées partielles. Un Notebook Mathematica commenté accompagne ce texte permettant au lecteur qui le souhaite de reproduire les calculs à son aise. Les aires surlignées en gris correspondent à des données peuvant être modifiées à volonté.

Nous résumons la littérature sur le sujet à trois ouvrages qui exhibent des niveaux de complétude et de lisibilité très différents :

L'ouvrage de **Peter Hydon**, "*Symmetry Methods for Differential Equations, a Beginner's Guide*" constitue un bon point de départ.

Celui de **Hans Stephani**, "*Differential Equations : their Solutions using Symmetries*" est plus complet tout en demeurant clair, un bon compromis.

La bible est l'ouvrage de **Peter Olver**, "*Applications of Lie Groups to Differential Equations*". Il est le plus complet et le moins accessible, abusant de notations rébarbatives.

L'idée n'est pas nouvelle de tenter de tirer parti des symétries d'un problème pour en extraire la solution. En algèbre, les travaux de Galois font le lien entre la solubilité exacte (en termes de radicaux) des équations polynomiales à coefficients entiers et le fait que leur groupe d'invariance possède une chaîne de sous-groupes invariants emboîtés, G_i, qui se termine sur le groupe identité et qui sont tels que chaque groupe quotient G_i/G_{i+1} est commutatif. Il en résulte que toutes les équations, jusqu'à l'ordre 4 inclus, sont solubles en termes de radicaux mais qu'à partir de l'ordre, 5, cela cesse d'être vrai en toute généralité.

A bien des égards, la méthode de Lie s'inspire de celle de Galois (plus exactement de l'extension due à Picard et Vessiot) : elle ambitionne de détecter quelles équations sont solubles en terme de quadratures. A défaut, elle propose de diminuer autant que possible l'ordre de l'équation étudiée. Elle révèle, en particulier, les intégrales premières par une procédure qui ne doit rien au hasard.

Notion de symétrie d'une équation différentielle.

Qu'appelle-t-on symétrie d'une équation différentielle ? Il s'agit d'un changement de variables, pouvant porter sur les variables dépendantes et/ou indépendantes, qui laisse l'équation inchangée. Autrement dit, l'équation s'écrit de la même façon en termes des anciennes et des nouvelles variables.

Deux questions distinctes sont de voir si de telles symétries existent et, dans l'affirmative, quelles conséquences on peut en tirer au niveau des solutions. Un premier élément de réponse à la deuxième question va de soi : si une transformation laisse une équation invariante, la même transformation appliquée à n'importe quelle solution fournit encore une solution.

Considérons l'exemple de l'équation différentielle suivante, d'ordre un, qui se résout par une simple quadrature, ($y_x = dy/dx$) :

$$y_x = \omega(x) \qquad \Rightarrow \qquad y = \int \omega(x)dx + c$$

Cette équation est visiblement invariante pour le changement de variable, $y \to y+c$. On vérifie de suite que si y est une solution, $y+c$ est également une solution. On voit, sur cet exemple simplissime, que la constante additive d'intégration est directement liée à l'existence d'une symétrie de l'équation par translation de la variable dépendante.

Considérons à présent cette autre équation, d'ordre deux,

$$y_{xx} = y \qquad \Rightarrow \qquad y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

Cette fois, c'est la translation de la variable indépendante, $x \to x+c$, qui laisse l'équation invariante. On vérifie que si $y(x)$ est une solution, $y(x+c)$ est également une solution :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \qquad \to \qquad y(x+c) = (c_1 e^c)e^x + (c_2 e^{-c})e^{-x}$$

Ces exemples sont rudimentaires, ce sont les généralisations successives qui sont intéressantes.

Symétries discrètes et continues.

Reconsidérons l'équation, $y_{xx} = y$: il saute aux yeux que le changement de variables, $\hat{x} = -x$ et $\hat{y} = y$, la laisse également invariante. Toutefois cette symétrie discrète est porteuse de fort peu d'information : tout ce qu'elle permet de tirer comme conclusion, c'est qu'il suffit de résoudre l'équation pour x≥0 pour connaître sa solution pour tout x. A part cela, la difficulté du problème posé n'a en rien diminué.

Aussi étrange que cela puisse paraître, on ne connaît aucune procédure algorithmique capable de trouver toutes les symétries discrètes d'une équation différentielle. La situation est très différente lorsqu'on considère les symétries continues.

Contrairement aux symétries discrètes, les symétries continues dépendent, par définition, d'un (ou de plusieurs) paramètre(s) qui varie(nt) continûment. On appelle symétrie de Lie d'une équation différentielle tout changement de variables portant sur les variables dépendante et/ou indépendante, comportant un (ou plusieurs) paramètre(s) continu(s), ε_i, et qui respecte les condition suivantes :

- il laisse l'équation différentielle invariante,
- les valeurs réelles de ε définissent une infinité de transformations associatives, possédant une structure de groupe : 1) la composition de deux transformations livre encore une transformation du type considéré, 2) une valeur de ε (on s'arrange habituellement pour que ce soit 0) correspond à la transformation identité et 3) pour toute valeur de ε, il en existe une autre qui correspond au changement de variable inverse.

Considérons l'équation :

$$y_{xx} = y_x y$$

Nous verrons bientôt comment trouver ses symétries mais il peut être utile, à ce stade, d'en exhiber deux sans justification. Les changements de variables suivants, $(x,y) \to (\hat{x},\hat{y})$, comportant un paramètre, ε_1 ou ε_2, définissent chacun une symétrie continue :

$$\begin{cases} \hat{x} = x + \varepsilon_1 \\ \hat{y} = y \end{cases} \overset{1^{ère}\ sym.}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x = \hat{x} - \varepsilon_1 \\ y = \hat{y} \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{x} = e^{-\varepsilon_2} x \\ \hat{y} = e^{\varepsilon_2} y \end{cases} \overset{2^{ème}\ sym.}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x = e^{\varepsilon_2} \hat{x} \\ y = e^{-\varepsilon_2} \hat{y} \end{cases}$$

On vérifie sans peine que ces changement de variables :

- laissent l'équation invariante sous la forme, $\hat{y}_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{y}_{\hat{x}} \hat{y}$.
- définissent une structure de groupe pour chaque paramètre indépendamment. L'identité et l'inverse sont clairement définis.

Rien n'empêche de réunir ces deux groupes de symétrie en un seul portant sur les deux paramètres à la fois :

$$\begin{cases} \hat{x} = xe^{-\varepsilon_2} + \varepsilon_1 \\ \hat{y} = e^{\varepsilon_2} y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e^{\varepsilon_2} (\hat{x} - \varepsilon_1) \\ y = e^{-\varepsilon_2} \hat{y} \end{cases}$$

On aurait pu être tenté de définir des symétries beaucoup moins restrictives, reposant sur un changement de variables paramétrique général,

$$\begin{cases} \hat{y} = f(x,y,\varepsilon) \\ \hat{x} = g(x,y,\varepsilon) \end{cases}$$

Cette méthode ne marche pas pour la simple raison qu'elle exige, pour trouver f et g, de résoudre un système d'équations aux dérivées partielles plus compliquées que l'équation initiale ! Lie a compris que les symétries ainsi définies étaient trop générales d'où inutilisables. C'est pourquoi il a proposé de s'en tenir aux changements de variables qui exhibent une structure de groupe. Insistons sur le fait que la composition de deux transformations d'un type donné doit livrer une transformation du même type.

De toute évidence c'est bien le cas des transformations suivantes (vérifiez en composant deux changements successifs, de paramètres, ε_1 et ε_2),

$$\begin{cases} \hat{x} = \dfrac{x}{\sqrt{1-2a\varepsilon x^2}} & \Rightarrow \qquad \hat{\hat{x}} = \dfrac{\hat{x}}{\sqrt{1-2a\varepsilon_1 \hat{x}^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1-2a(\varepsilon_1+\varepsilon_2)x^2}} \\ \hat{y} = \dfrac{y}{\sqrt{1-2b\varepsilon y^2}} & \Rightarrow \qquad \hat{\hat{y}} = \dfrac{\hat{y}}{\sqrt{1-2a\varepsilon_1 \hat{y}^2}} = \dfrac{y}{\sqrt{1-2a(\varepsilon_1+\varepsilon_2)y^2}} \end{cases}$$

alors que ce ne serait pas le cas des transformations (vérifiez de même),

$$\begin{cases} \hat{x} = \dfrac{x}{\sqrt{1-2a\varepsilon x}} & \Rightarrow \qquad \hat{\hat{x}} = \dfrac{\hat{x}}{\sqrt{1-2a\varepsilon_1 \hat{x}}} = \dfrac{x}{\sqrt{\sqrt{1-2a\varepsilon_2 x}-2a\varepsilon_1 x}} \\ \hat{y} = \dfrac{y}{\sqrt{1-2b\varepsilon y}} & \Rightarrow \qquad \hat{\hat{y}} = \dfrac{\hat{y}}{\sqrt{1-2a\varepsilon_1 \hat{y}}} = \dfrac{y}{\sqrt{\sqrt{1-2a\varepsilon_2 y}-2a\varepsilon_1 y}} \end{cases}$$

Le premier changement de variables est donc du type de Lie mais pas le second.

Transformations infinitésimales : générateurs de Lie.

Une propriété des transformations de Lie les rend particulièrement attractives : étant opérationnelles pour toutes valeurs des paramètres, elles le sont, en particulier, pour toute transformation infinitésimale, au voisinage de, $\varepsilon=0$. Les conséquences sont énormes car il en résulte que la recherche des symétries se réduit à un problème linéaire même dans le cas où l'équation différentielle de départ ne l'est pas.

Dans l'exposé qui suit, on discute essentiellement les équations différentielles, d'ordre, N quelconque. On évoquera plus loin le cas des systèmes.

Une équation différentielle d'ordre, N, s'écrit, en toute généralité :

$$H(x,y,y',y'',\cdots,y^{(N-1)},y^{(N)})=0 \qquad (y'=y_x, y''=y_{xx},\cdots)$$

Dans le cas fréquent où la dérivée d'ordre N peut être extraite, cela donne :

$$y^{(N)}=\omega(x,y,y',y'',\dots,y^{(N-1)})$$

soit dans les cas simples, $N = 1, 2, 3, 4,$ qui nous concerneront :

$$y_x=\omega(x,y) \qquad y_{xx}=\omega(x,y,y_x) \qquad y_{xxx}=\omega(x,y,y_x,y_{xx}) \qquad y_{xxxx}=\omega(x,y,y_x,y_{xx},y_{xxx})$$

Une symétrie de Lie laisse, par définition, l'équation différentielle invariante. On doit donc pouvoir écrire en terme des anciennes ou des nouvelles variables :

$$H(x,y,y',y'',\cdots,y^{(N)})=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad H(\hat{x},\hat{y},\hat{y}',\hat{y}'',\cdots,\hat{y}^{(N)})=0$$

Certains auteurs considèrent que contexte renseigne habituellement sur la portée de la notation primée en ce qui concerne les dérivées. Dans les exemples que nous aurons à traiter, nous éviterons cependant cette notation quand elle est source d'ambiguïtés. En effet, dans les changements de variables que nous avons en vue, il serait catastrophique de confondre les dérivées par rapport aux anciennes et aux nouvelles variables.

Une transformation de Lie est ponctuelle si le changement de variables qu'elle définit ne mentionne que les variables dépendante et indépendante. Par exemple, la transformation,

$$\begin{cases} \hat{y} = \hat{y}(x,y,\varepsilon) \\ \hat{x} = \hat{x}(x,y,\varepsilon) \end{cases}$$

est ponctuelle. Par contre, la transformation suivante ne l'est pas :

$$\begin{cases} \hat{y} = \hat{y}(x,y,y_x,\varepsilon) \\ \hat{x} = \hat{x}(x,y,\varepsilon) \end{cases}$$

Il peut paraître étrange de vouloir mélanger les variables et leurs dérivées dans une transformation mais le fait est que les transformations non ponctuelles (on dit dynamiques) sont utiles : elles seront évoquées à la fin de l'exposé.

Un ensemble de transformations ponctuelles possédant une structure de groupe admet les transformations infinitésimales au voisinage de $\varepsilon=0$ (soit l'identité rappelons-le). Elles s'écrivent, au premier ordre en, ε :

$$\begin{cases} \hat{x} = x + \varepsilon\xi(x,y) \\ \hat{y} = y + \varepsilon\eta(x,y) \end{cases}$$

On appelle générateur du groupe, l'opérateur :

$$X = \xi\partial_x + \eta\partial_y$$

Il "génère" les nouvelles variables à partir des anciennes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\hat{x}}{\partial\varepsilon} = \xi(\hat{x},\hat{y}) \\ \dfrac{\partial\hat{y}}{\partial\varepsilon} = \eta(\hat{x},\hat{y}) \end{cases} \quad \overset{\substack{\hat{x}(\varepsilon=0)=x \\ \hat{y}(\varepsilon=0)=y}}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} \hat{x} = e^{\varepsilon X}x = (1+\varepsilon X/1!+\varepsilon^2X^2/2!+\cdots)x \\ \hat{y} = e^{\varepsilon X}y = (1+\varepsilon X/1!+\varepsilon^2X^2/2!+\cdots)y \end{cases}$$

Par exemple, on vérifie que l'opérateur, $X = \partial_x$, engendre une translation de la variable indépendante :

$$\hat{x} = e^{\varepsilon X}x = e^{\varepsilon\partial_x}x = x + \frac{\varepsilon}{1!}\partial_x x + \frac{\varepsilon^2}{2!}\partial_x^2 x + \cdots = x + \varepsilon$$

Le lecteur se reportera à la section 1 du Notebook afin d'observer comment Mathematica trouve le changement de variables quand on lui donne le générateur et inversement.

Changement de variables et formes normales.

Pour toute symétrie ponctuelle, il existe un jeu de variables, r et s, dites canoniques, qui lui sont adaptées. Traduit en terme des variables canoniques, le générateur se réduit à la forme normale, ∂_s, où, s joue le rôle de la nouvelle variable dépendante. Les variables canoniques permettent, en particulier, d'abaisser l'ordre de l'équation différentielle d'une unité.

Comment les générateurs de Lie se transforment-ils lors d'un changement de variables (non paramétrique), $(x,y) \to (r,s)$? La réponse est simple :

$$X_{old} = \xi\partial_x + \eta\partial_y \qquad \to \qquad X_{new} = (X_{old}r(x,y))\partial_r + (X_{old}s(x,y))\partial_s$$

On trouve donc les variables canoniques en résolvant le système :

$$\begin{cases} Xr = 0 \\ Xs = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \xi\partial_x + \eta\partial_y = \partial_s$$

Pour ce faire, on procède comme suit :

$$\xi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r = x \qquad \& \qquad s = \int \frac{dy}{\eta(x(r,y),y)}$$

$$\xi \neq 0 \qquad : \qquad \xi dy - \eta dx = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} f(x,y,c) = 0 \\ r = c \end{cases} \qquad \& \qquad s = \int \frac{dx}{\xi(x,y(x,r))}$$

Premier exemple : $X = \partial_x \qquad \Rightarrow \qquad \xi = 1 \;\;\&\;\; \eta = 0$

$$dy = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} y = c \\ r = y \end{cases} \qquad \& \qquad s = \int dx = x$$

Deuxième exemple : $X = \partial_y \qquad \Rightarrow \qquad \xi = 0 \;\;\&\;\; \eta = 1$

$$r = x \qquad \& \qquad s = \int dy = y$$

Troisième exemple : $X = -y\partial_x + x\partial_y \qquad \Rightarrow \qquad \xi = -y \;\;\&\;\; \eta = x$

$$-ydy - xdx = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = c \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \qquad \& \qquad s = \int \frac{dx}{-\sqrt{r^2 - x^2}} = arctg\,\frac{y}{x}$$

Il semblerait a priori que n'importe quelle fonction de x^2+y^2 pourrait convenir pour r mais on vérifie que seul le choix retenu livre la relation attendue,

$$X_{new} = \left((-y\partial_x + x\partial_y)\sqrt{x^2 + y^2}\right)\partial_r + \left((-y\partial_x + x\partial_y)arctg\,\frac{y}{x}\right)\partial_s = \partial_s$$

Symétries élémentaires.

Considérons l'équation différentielle d'ordre, N : $H(x,y,y',y'',\cdots,y^{(N)})=0$. Un œil exercé détecte certaines symétries ponctuelles au premier coup d'oeil. Déterminons pour l'exemple les variables canoniques correspondantes et observons la réduction d'ordre que ces variables autorisent.

1) Lorsque la variable dépendante, y, est absente, comme dans l'équation, $y_{xxx}=y_x^2 y_{xx}$, une symétrie évidente de translation se note,

$$\hat{y}=y+\varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad X=\partial_y$$

Les variables, x $(=r)$ et y $(=s)$, sont spontanément canoniques, on a bien : $Xx=0$ et $Xy=1$. On note qu'il suffit de poser, $u=y_x$, pour abaisser l'ordre de l'équation : $u_{xx}=u^2 u_x$.

2) Lorsque la variable indépendante, x, est absente, comme dans l'équation, $y_{xx}=y^2$, une symétrie de translation évidente se note,

$$\hat{x}=x+\varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad X=\partial_x$$

Les variables, x et y, sont encore canoniques à condition de les permuter ($r=y$ et $s=x$). On note, cette fois, qu'il faut poser, $u=x_y$, pour abaisser l'ordre de l'équation :

$$y_{xx}=y^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_{yy}=-y^2 x_y^3 \qquad \Rightarrow \qquad u_y=-y^2 u^3$$

3) Lorsque l'équation est invariante par un changement d'échelle portant sur x et/ou sur y, comme dans l'équation, $2y_x y_{xxx}=3y_{xx}^2$, une symétrie, à peine moins évidente, se note :

$$\begin{cases}\hat{x}=e^{a\varepsilon}x\\ \hat{y}=e^{b\varepsilon}y\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad X=ax\partial_x+by\partial_y$$

Variables canoniques : $r=y^{1/b}/x^{1/a}$ et $s=(\ell n y)/b$

4) Un exemple important est la symétrie de rotation autour de l'origine du plan cartésien :

$$\begin{cases}\hat{x}=x\cos\varepsilon-y\sin\varepsilon\\ \hat{y}=y\cos\varepsilon+x\sin\varepsilon\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad X=-y\partial_x+x\partial_y$$

Les variables canoniques sont, sans surprise, les coordonnées polaires du plan :

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \text{ et } s=arctg\,\frac{y}{x}.$$

1. *Comment trouver les symétries ponctuelles ?*

Notion de prolongations.

La recherche des symétries ponctuelles d'une équation différentielle passe inévitablement par la traduction de celle-ci en termes des nouvelles variables :

$$H(x, y, y', y'', \cdots, y^{(N)}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad H(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \hat{y}'', \cdots, \hat{y}^{(N)}) = 0$$

On voit qu'il ne suffit pas de connaître les formules de passages de x et y vers $\hat{x}$ et $\hat{y}$, il faut encore pouvoir étendre (le terme technique est "prolonger") ces formules aux dérivées successives. Dans le cas des transformations infinitésimales, il est clair que les dérivées écrites en terme des nouvelles variables diffèrent peu de celles écrites en terme des anciennes. Il est d'usage d'adopter les notations suivantes (C'est précisément ici que la notation primée serait source de confusion) :

$$\begin{cases} \hat{x} = x + \varepsilon\xi(x, y) \\ \hat{y} = y + \varepsilon\eta(x, y) \end{cases} \qquad \text{(pour rappel)}$$
$$\hat{y}_{\hat{x}} = y_x + \varepsilon\eta^{(1)}(x, y, y_x)$$
$$\hat{y}_{\hat{x}\hat{x}} = y_{xx} + \varepsilon\eta^{(2)}(x, y, y_x, y_{xx})$$
$$\hat{y}_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}} = y_{xxx} + \varepsilon\eta^{(3)}(x, y, y_x, y_{xx}, y_{xxx})$$

etc.

Le calcul des prolongations, $\eta^{(k)}$, $(k=1, 2, \ldots)$, est un exercice de calcul différentiel. Il est aisé mais fastidieux comme le montre déjà le cas, $k=1$, détaillé pour l'exemple. On a successivement et toujours au premier ordre en, ε :

$$y_x = \frac{dy}{dx} \qquad et \qquad \hat{y}_{\hat{x}} = \frac{d\hat{y}}{d\hat{x}}$$

$$\hat{x} = x + \varepsilon\xi(x, y) \qquad \Rightarrow \qquad d\hat{x} = dx + \varepsilon(\xi_x + \xi_y y_x)dx$$
$$\hat{y} = y + \varepsilon\eta(x, y) \qquad \Rightarrow \qquad d\hat{y} = y_x dx + \varepsilon(\eta_x + \eta_y y_x)dx$$

$$\hat{y}_{\hat{x}} = \frac{y_x + \varepsilon(\eta_x + \eta_y y_x)}{1 + \varepsilon(\xi_x + \xi_y y_x)} \approx y_x + \varepsilon(\eta_x + \eta_y y_x - \xi_x y_x - \xi_y y_x^2) + 0(\varepsilon^2)$$

On en déduit le résultat cherché, $\eta^{(1)}$:

$$\eta^{(1)} = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y_x - \xi_y y_x^2$$

Les autres quantités, $\eta^{(k)}$, suivent de plus en plus fastidieusement. Par exemple, le calcul de $\eta^{(2)}$ démarre comme suit :

$$\hat{y}_{\hat{x}\hat{x}} = \frac{d\hat{y}_{\hat{x}}}{d\hat{x}} = \frac{d\,\dfrac{y_x + \varepsilon(\eta_x + \eta_y y_x)}{1 + \varepsilon(\xi_x + \xi_y y_x)}}{dx + \varepsilon(\xi_x + \xi_y y_x)dx} = \cdots \approx y_{xx} + \varepsilon\eta^{(2)}$$

Tous calculs faits, on trouve successivement :

$$\eta^{(2)} = \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y_x + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y_x^2 - \xi_{yy}y_x^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y_x)y_{xx}$$

$$\begin{aligned}\eta^{(3)} = {} & \eta_{xxx} + (3\eta_{xxy} - \xi_{xxx})y_x + 3(\eta_{xyy} - \xi_{xxy})y_x^2 + (\eta_{yyy} - 3\xi_{xyy})y_x^3 - \xi_{yyy}y_x^4 \\ & + 3[\eta_{xy} - \xi_{xx} + (\eta_{yy} - 3\xi_{xy})y_x - 2\xi_{yy}y_x^2]y_{xx} - 3\xi_y y_{xx}^2 + (\eta_y - 3\xi_x - 4\xi_y y_x)y_{xxx}\end{aligned}$$

et le nombre de termes croît exponentiellement avec k. Par bonheur, ces quantités obéissent à une récurrence qui en facilite le calcul automatisé (attention aux dérivées totales, D_x, et aux dérivées partielles, $y^{(i)}$!) :

$$\eta^{(i)} = D_x\eta^{(i-1)} - y^{(i)}D_x\xi$$

Le lecteur intéressé fera bien de vérifier qu'il maîtrise les notations en vérifiant, à la main, le cas particulier,

$$\eta^{(2)} = D_x\eta^{(1)} - y^{(2)}D_x\xi = \partial_x\eta^{(1)} + (\partial_y\eta^{(1)})y_x - y_{xx}(\xi_x + \xi_y y_x) = \cdots$$

puis il se reportera à la section 2 du Notebook Lie pour suivre l'automatisation des calculs.

On appelle prolongation d'ordre, i, d'un générateur, X, son extension aux dérivées d'ordres supérieurs jusqu'à l'ordre, i, inclus, soit dans le détail :

$$X^{(i)} = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta^{(1)}\partial_{y'} + \eta^{(2)}\partial_{y''} + \cdots + \eta^{(i)}\partial_{y^{(i)}}$$

Il est essentiel de comprendre qu'une fois connu le générateur, X $(=X^{(0)})$, toutes ses prolongations sont déterminées. C'est la (mauvaise) raison pour laquelle certains auteurs utilisent une même notation, X, pour désigner indifféremment n'importe quel $X^{(i)}$. Il est commode de représenter le générateur prolongé sous la forme d'un vecteur, $V^{(i)}$,

$$V^{(i)} = \{\xi,\ \eta,\ \eta^{(1)},\ \eta^{(2)},\ \cdots,\ \eta^{(i)}\}$$

étant entendu que son expression véritable sous-entend le produit scalaire formel,

$$X^{(i)} = V^{(i)} \cdot (\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_{y'},\ \cdots,\ \partial_{y^{(i)}})$$

Reportez-vous à la section 2 du Notebook pour le calcul de la troisième prolongation du générateur, $X = -y\partial_x + x\partial_y$, soit au format traditionnel :

$$X^{(3)} = -y\partial_x + x\partial_y + (1 + y_x^2)\partial_{y_x} + 3y_x y_{xx}\partial_{y_{xx}} + (3y_{xx}^2 + 4y_x y_{xxx})\partial_{y_{xxx}}$$

Seuls les générateurs de translation, ∂_x et ∂_y, coïncident avec leurs prolongations à tous les ordres : $X^{(i)} = \partial_x$ et $X^{(i)} = \partial_y$ (Vérifiez, c'est Mathematica qui fait le travail !).

La condition de symétrie.

Première formulation de la condition de symétrie. Le résultat fondamental que nous donnons sans démonstration est le suivant. Lorsqu'une symétrie ponctuelle de générateur, X, existe, la condition,

$$H(x,y,y',y'',\cdots,y^{(N)}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad H(\hat{x},\hat{y},\hat{y}',\hat{y}'',\cdots,\hat{y}^{(N)}) = 0$$

se traduit, comme suit, en terme de la $N^{ième}$ prolongation de ce générateur :

$$\boxed{X^{(N)}H = (\xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta^{(1)}\partial_{y'} + \eta^{(2)}\partial_{y''} + \cdots + \eta^{(N)}\partial_{y^{(N)}})H = 0 \qquad (mod \quad H = 0)}$$

Si l'équation différentielle est notée, $y^{(N)} = \omega(x, y, y', y'', \ldots, y^{(N-1)})$, la condition de symétrie se simplifie comme suit :

$$\boxed{X^{(N-1)}\omega = (\xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta^{(1)}\partial_{y'} + \eta^{(2)}\partial_{y''} + \cdots + \eta^{(N-1)}\partial_{y^{(N-1)}})\omega = \eta^{(N)} \qquad (mod \quad y^{(N)} = \omega)}$$

Deuxième formulation de la condition de symétrie. Une équation différentielle est habituellement vue sous l'angle des solutions qui la satisfont. On peut la voir autrement, sous l'angle des intégrales premières qu'elle accepte. Ces intégrales premières satisfont la condition,

$$D_x I(x,y,y',\cdots,y^{(N-1)}) = 0 \qquad (mod \quad H = 0)$$

que l'on peut réécrire en terme de l'opérateur, A,

$$\boxed{A = \partial_x + y'\partial_y + y''\partial_{y'} + \cdots + y^{(N-1)}\partial_{y^{(N-2)}} + \omega\partial_{y^{(N-1)}} \qquad \Rightarrow \qquad AI = 0}$$

Autrement dit, $H=0$ ou $AI=0$ définissent la même équation différentielle. On peut alors traduire comme suit la condition de symétrie en terme de l'opérateur, A :

$$\boxed{[X^{(N-1)}, A] = \lambda(x,y,y',y'',\ldots,y^{(N-1)})A}$$

(où $[U, V]$ désigne le commutateur de U et de V et λ est une fonction arbitraire).

En résumé, l'équation, $y^{(N)} = \omega(x, y, y', y'', \ldots, y^{(N-1)})$, admet l'une ou l'autre forme équivalente de la condition de symétrie $(mod \quad y^{(N)} = \omega)$:

$$\boxed{X^{(N-1)}\omega = \eta^{(N)} \qquad \Leftrightarrow \qquad [X^{(N-1)}, A] = \lambda(x,y,y',y'',\ldots,y^{(N-1)})A}$$

Toute solution, $(\xi, \ \eta)$, de cette condition définit une symétrie ponctuelle, de générateur, $X = \xi\partial_x + \eta\partial_y$. La condition de symétrie équivaut à une équation aux dérivées partielles et on pourrait craindre que sa résolution soit aussi ardue sinon plus que la résolution de l'équation de départ mais il n'en est généralement rien grâce au fait qu'elle est linéaire. Un exemple est plus utile à ce stade.

Exemple : soit l'équation différentielle (d'ordre, $N=2$),

$$y_{xx} = \frac{y_x^2}{y} - y^2 \quad (=\omega)$$

La condition de symétrie, $X^{(1)}\omega = \eta^{(2)} \quad (mod \quad y_{xx} = \omega)$, se développe sous la forme :

$$\eta\left(-\frac{y_x^2}{y^2} - 2y\right) + (\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y_x - \xi_y y_x^2)\frac{2y_x}{y} =$$
$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y_x + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y_x^2 - \xi_{yy}y_x^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y_x)\left(\frac{y_x^2}{y} - y^2\right)$$

Trouver les solutions de cette équation semble une tâche insurmontable mais elle est facilitée par le fait que ni ξ ni η ne dépendent de la dérivée, y_x. Il en résulte que cette relation ne peut être identiquement vérifiée que si les coefficients de tous les monômes de dépendance distincte en y_x sont nuls. Dans le cas présent, il y en a quatre (les coefficients de $y_x^j \ \ (j = 0,1,2,3)$). En conséquence, la condition éclate en quatre équations linéaires aux dérivées partielles qui forment un système surdéterminé pour les deux inconnues, ξ et η.

C'est à ce stade que l'intervention d'un logiciel formel est bienvenue. Le lecteur suivra le déroulement des calculs à la section 3 du Notebook que nous commentons brièvement. On s'intéresse en priorité aux équations qui annulent les coefficients de y_x^3 et de y_x^2, dans cet ordre. On trouve que ξ et η sont obligatoirement de la forme :

$$\begin{cases} \xi(x,y) = \alpha(x)\ell n|y| + \beta(x) \\ \eta(x,y) = \gamma(x)y + \delta(x)y\ell n|y| + \alpha'(x)y(\ell n|y|)^2 \end{cases}$$

où α, β, γ et δ ne dépendent explicitement que de x (et pas de y). Il reste à introduire ces deux formes dans les deux équations non encore utilisées (celles qui annulent les coefficients de y_x^1 et de y_x^0) et à préciser la dépendance en x des fonctions, α, β, γ et δ. On trouve :

$$\alpha(x) = 0, \ \ \beta(x) = k_1 + k_2 x, \ \ \gamma(x) = -2k_2, \ \ \delta(x) = 0$$

d'où au bilan :

$$\begin{cases} \xi(x,y) = k_1 + k_2 x \\ \eta(x,y) = -2k_2 y \end{cases}$$

Il existe autant de symétries ponctuelles que de paramètres arbitraires, soit deux dans le cas présent. Leurs générateurs s'écrivent :

$$X_1 = \partial_x \qquad X_2 = x\partial_x - 2y\partial_y$$

La procédure, détaillée à la section 3 du Notebook, est basée sur l'exploitation de la première version de la condition de symétrie, $X^{(N)}H = 0$. Nous l'avons complétée par la seule vérification de la seconde version, $[X^{(N-1)}, A] = \lambda(x, y, y', y'', \ldots, y^{(N-1)})A$, de cette condition.

Cette procédure de détermination des symétries ponctuelles cesse curieusement d'être opérationnelle dans deux cas : lorsque l'équation est du premier ordre ($N=1$) ou lorsque N est quelconque mais que l'équation est linéaire.

Lorsque $N=1$, $y_x = \omega(x, y)$ et la condition de symétrie s'écrit simplement :

$$X\omega = \eta^{(1)} \qquad \Rightarrow \qquad (\xi\partial_x + \eta\partial_y)\omega = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)\omega - \xi_y\omega^2 \qquad (mod \quad y_x = \omega)$$

On note que y_x est forcément absent de cette condition, étant systématiquement remplacé par, $y_x = \omega$. C'est pour cette raison qu'à l'ordre un, la condition de symétrie n'éclate jamais en un système plus simple. Il en résulte qu'elle peut être satisfaite d'une infinité de manière : il suffit de poser à peu près n'importe quoi pour η et d'en déduire, ξ (ou l'inverse). Autrement dit, à l'ordre un, il existe une infinité de symétries dont aucune n'est facile à mettre en évidence ! Nous verrons cependant sous peu que si, par chance ou par intuition, on trouve une symétrie particulière, cela suffit généralement à résoudre l'équation.

Lorsque l'équation est linéaire, la procédure échoue pour une autre raison beaucoup plus radicale : dans ce cas, la condition de symétrie fait retomber sur l'équation de départ de sorte que l'on a pas progressé d'un pas. C'est donc essentiellement l'étude des équations non linéaires qui bénéficie de la méthode de Lie.

Nous allons à présent montrer comment la connaissance des symétries ponctuelles d'une équation différentielle permet de réduire progressivement l'ordre de cette équation et dans les cas favorables d'en ramener la solution à un ensemble de quadratures.

2. *Comment tirer parti de l'existence de symétries ?*

Le cas particulier des équations d'ordre un.

La seule question qui se pose, à l'ordre un, est la suivante : quand peut-on ramener l'équation à une simple quadrature ? Autrement dit, quand peut-on lui trouver un facteur intégrant ? La méthode de Lie permet de répondre à cette question. L'idée est de chercher une intégrale première, *I*, définie par la relation,

$$y_x = \omega(x,y) \qquad : \qquad D_x I(x,y) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad AI = \partial_x I + \omega \partial_y I = 0$$

Si on connaît une symétrie de générateur, *X*, et si *I* est intégrale première, *XI*, l'est également. Comme elle est essentiellement unique, on peut écrire :

$$XI = F(I)$$

où, *F* est une fonction a priori inconnue. Il en résulte qu'il doit être possible de trouver une intégrale première, Φ, telle que :

$$X\Phi = 1$$

il suffit pour cela que Φ soit la primitive de 1/F. En résumé, il existe une intégrale première, Φ, telle que :

$$\begin{aligned} X\Phi &= \xi\Phi_x + \eta\Phi_y = 1 \\ A\Phi &= \Phi_x + \omega\Phi_y = 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \Phi_x &= -\omega/(\eta - \omega\xi) \\ \Phi_y &= 1/(\eta - \omega\xi) \end{aligned}$$

Vu l'égalité des dérivées croisées (vérifiez !), la primitive est assurée d'exister, sous réserve que $\eta - \omega\xi$ ne soit pas nul. La solution cherchée s'écrit :

$$\Phi(x,y) = \int \frac{dy - \omega dx}{\eta - \omega\xi} = C^{te}$$

Autrement dit, $1/(\eta - \omega\xi)$ est un facteur intégrant de l'équation, $y_x = \omega(x,y)$.

Exemple. Soit l'équation d'ordre un,

$$y_x = y^2 - \frac{y}{x}$$

La condition de symétrie s'écrit :

$$(\xi\partial_x + \eta\partial_y)\left(y^2 - \frac{y}{x}\right) = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)\left(y^2 - \frac{y}{x}\right) - \xi_y\left(y^2 - \frac{y}{x}\right)^2$$

Vu qu'on est à l'ordre un, on sait que cette condition possède une infinité de solutions et qu'il est impossible de les trouver toutes. Heureusement, cela n'est pas nécessaire car il suffit de trouver une solution particulière qui n'annule pas le facteur, $\eta - \omega\xi$.

Une procédure couramment utilisée consiste à essayer une forme donnée, polynomiale par exemple, pour les inconnues, ξ et η. C'est évidemment à ce stade que la chance (ou le flair) interviennent comme nous l'avons laissé entendre. Une solution polynomiale est facile à trouver, si elle existe : il suffit d'essayer tous les polynômes dans l'ordre des degrés croissants. Dans l'exemple qui nous occupe, on trouve déjà une solution en se limitant à des polynômes du premier degré :

$$\xi(x,y) = x \qquad \& \qquad \eta(x,y) = -y$$

d'où, $1/(\eta - \omega\xi) = 1/(-xy^2)$, est un facteur intégrant de l'équation de départ. On a en effet :

$$y_x = y^2 - \frac{y}{x} \qquad \Rightarrow \qquad dy = (y^2 - \frac{y}{x})dx \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{xy^2}dy + \frac{y^2 - y/x}{xy^2}dx = 0$$

$$\begin{matrix} \Phi_x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2 y} \\ \Phi_y = -\dfrac{1}{xy^2} \end{matrix} \qquad \Rightarrow \qquad \Phi = \frac{1}{xy} + \ell n|x| = c \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{1}{x(c - \ell n|x|)}$$

On peut traiter le même problème autrement et ceci prépare les sections suivantes. L'équation, $y_x = y^2 - \dfrac{y}{x}$, possédant une symétrie particulière de générateur, $X = x\partial_x - y\partial_y$, il y correspond un jeu de variables canoniques, telles que : $Xr = 0 \quad et \quad Xs = 1$. Elles se notent :

$$\begin{cases} r = xy \\ s = -\ell ny \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = re^s \\ y = e^{-s} \end{cases}$$

Traduisons l'équation de départ en terme des variables canoniques. Dans ce cas très simple (où ne figurent que des dérivées premières), cela se fait facilement à la main mais le lecteur peut également se reporter à la section 4 du Notebook qui généralise le calcul à tous les ordres. L'équation s'écrit en terme des nouvelles variables :

$$y_x = y^2 - \frac{y}{x} \qquad \Rightarrow \qquad s_r = \frac{1-r}{r^2} \qquad \overset{u=s_r}{\Rightarrow} \qquad u = \frac{1-r}{r^2}$$

On voit qu'au bilan, on a transformé l'équation différentielle d'ordre un en une équation algébrique plus une quadrature, celle qui est nécessaire pour remonter de u à s. La solution finale coïncide évidemment avec celle trouvée par la méthode du facteur intégrant :

$$s_r = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \qquad \Rightarrow \qquad s = -\frac{1}{r} - \ell n|r| + c \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{1}{x(c - \ell n|x|)}$$

Réductions successives d'ordre.

Quel que soit l'ordre, N, d'une équation différentielle, toute symétrie ponctuelle définit un jeu de variables canoniques qui permettent d'abaissent l'ordre de l'équation d'une unité. Il est tentant d'espérer pouvoir poursuivre la manœuvre jusqu'à l'ordre zéro (équation algébrique). Etudions cette perspective de réduction(s) d'ordre en nous servant d'un exemple d'équation d'ordre trois,

$$y_{xxx} = \frac{3}{2}\frac{y_{xx}^2}{y_x}$$

Elle possède six symétries ponctuelles, de générateurs,

$$X_1 = \partial_x \qquad X_2 = x\partial_x \qquad X_3 = x^2\partial_x \qquad X_4 = \partial_y \qquad X_5 = y\partial_y \qquad X_6 = y^2\partial_y$$

N'importe quel générateur peut faire l'affaire pour abaisser l'ordre de l'équation d'une unité. Commençons par le plus facile, X_4 : il exprime que l'équation est invariante par translation de la variable dépendante. Nous savons que cela implique que les variables, x et y, sont canoniques d'où la réduction d'ordre est immédiate. De fait, il suffit de poser, $u = y_x$, pour passer de l'ordre trois à l'ordre deux :

$$y_{xxx} = \frac{3}{2}\frac{y_{xx}^2}{y_x} \qquad \overset{u=y_x}{\Rightarrow} \qquad u_{xx} = \frac{3}{2}\frac{u_x^2}{u}$$

On aurait tout aussi bien pu partir de, X_1, qui exprime que l'équation initiale est également invariante par translation de la variable indépendante. Cette fois, les variables, x et y, doivent être permutées pour être canoniques. On trouve successivement, conformément aux règles connues (recalculées pour l'exemple à la fin de la section 4 du Notebook),

$$y_x = \frac{1}{x_y} \qquad y_{xx} = -\frac{x_{yy}}{x_y^3} \qquad y_{xxx} = -\frac{x_{yyy}}{x_y^4} + 3\frac{x_{yy}^2}{x_y^5} \qquad \cdots ,$$

$$y_{xxx} = \frac{3}{2}\frac{y_{xx}^2}{y_x} \qquad \Rightarrow \qquad x_{yyy} = \frac{3}{2}\frac{x_{yy}^2}{x_y} \qquad \overset{u=x_y}{\Rightarrow} \qquad u_{yy} = \frac{3}{2}\frac{u_y^2}{u}$$

Rien n'empêche de démarrer la réduction à partir de X_2, X_3, X_5 ou X_6. Seules les variables canoniques diffèrent mais à part cela, le principe de la réduction reste le même.

Jusqu'où peut-on espérer poursuivre la réduction d'ordre ? Une équation, d'ordre N, possédant R symétries ponctuelles, peut-elle être ramenée, par réductions successives, à une équation d'ordre, N-R, plus R quadratures, celles exigées par le retour aux variables d'origine, x et y ? Dans le cas, R=N, l'équation différentielle se verrait remplacée par une équation algébrique plus N quadratures. Dans l'affirmative, l'ordre dans lequel on utilise les symétries a-t-il de l'importance ? Les réponses à ces questions doivent être nuancées.

Certes, la procédure de réduction peut en principe être répétée à tous les stades où une symétrie ponctuelle reste présente mais, précisément, il n'est nullement garanti que l'équation réduite hérite automatiquement des symétries non encore utilisées. A cet égard, tous les cas de figures existent : certaines symétries ponctuelles, voire toutes, peuvent subsister, parfois il n'en reste aucune et parfois même il en apparaît de nouvelles.

On peut tenter d'y voir plus clair en suivant l'une ou l'autre de deux voies. L'une est analytique et l'autre est algébrique.

Etat des symétries lors d'une réduction d'ordre : étude analytique.

La procédure de réduction classique commence par sélectionner un générateur auquel elle associe un changement de variables canoniques, $(x,y) \to (r,s)$. Ensuite elle pose, $u = s_r$, dans l'équation obtenue ce qui entraîne une diminution d'ordre. Au fond, tout se passe comme si on était passé des variables, (x,y), aux variables, (r,s_r). La présence de la dérivée, s_r, entraîne que la traduction des générateurs de symétrie en terme des nouvelles variables doit se faire sur base de la première prolongation du générateur conformément à,

$$(x,y) \to (u,v) \qquad \Rightarrow \qquad X_{new} = (X_{old}^{(1)} u(x,y,y_x))\partial_u + (X_{old}^{(1)} v(x,y,y_x))\partial_v$$

Il semblerait qu'après réduction, on soit assuré de retrouver les générateurs non utilisés simplement traduits au moyen de la formule précédente en terme des nouvelles variables. Pourtant dans certains cas, certaines symétries ponctuelles semblent disparaître, comment cela se peut-il ? A ce stade, des exemples valent mieux qu'un long discours.

Premier exemple. Soit l'équation,

$$y_x^5 y_{xxx} = 3y_x^4 y_{xx}^2 + y_{xx}^3$$

Elle possède quatre symétries ponctuelles, de générateurs,

$$X_1 = \partial_x \qquad X_2 = \partial_y \qquad X_3 = y\partial_x \qquad X_4 = x\partial_x + \frac{2}{3} y\partial_y$$

Voyons ce qui se passe si on réduit cette équation en commençant par utiliser X_2. Cette réduction est immédiate :

$$y_x^5 y_{xxx} = 3y_x^4 y_{xx}^2 + y_{xx}^3 \quad \overset{\substack{u=x \\ v=y_x}}{\Rightarrow} \quad v^5 v_{uu} = 3v^4 v_u^2 + v_u^3$$

Que sont devenus X_1, X_3 et X_4 ? Pour X_1 et X_4, la réponse est facile :

$$X_{old,1}^{(1)} = \partial_x + 0\partial_y + 0\partial_{y_x} \qquad \to \qquad (\partial_x x)\partial_u + (\partial_x y_x)\partial_v = \partial_u$$

$$X_{old,4}^{(1)} = x\partial_x + \frac{2}{3} y\partial_y - \frac{1}{3} y_x \partial_{y_x} \qquad \to$$

$$((x\partial_x + \frac{2}{3} y\partial_y - \frac{1}{3} y_x\partial_{y_x})x)\partial_u + ((x\partial_x + \frac{2}{3} y\partial_y - \frac{1}{3} y_x\partial_{y_x})y_x)\partial_v = x\partial_u - \frac{1}{3} y_x\partial_v = u\partial_u - \frac{1}{3} v\partial_v$$

Par contre, pour X_3, tout se complique :

$$X^{(1)}_{old,3} = y\partial_x + 0\partial_y - y_x^2\partial_{y_x} \qquad \rightarrow$$
$$((y\partial_x + 0\partial_y - y_x^2\partial_{y_x})x)\partial_u + ((y\partial_x + 0\partial_y - y_x^2\partial_{y_x})y_x)\partial_v = y\partial_u - y_x^2\partial_v = \left(\int vdu\right)\partial_u - v^2\partial_v$$

On constate que la symétrie a cessé d'être locale : elle intègre toutes les valeurs de la nouvelle variable, *v*.

En résumé :

La symétrie initialement associée à X_2 a été consommée et elle a normalement disparu.
Les symétries initialement associées à X_1 et X_4 subsistent.
La symétrie initialement associée à X_3 n'a pas vraiment disparu mais elle a cessé d'être locale.

Au bilan, il subsiste, par bonheur dans ce cas, suffisamment de symétries ponctuelles locales, X_1 et X_4, pour espérer poursuivre la réduction jusqu'à son terme.

De fait, si on poursuit en utilisant, $X_{1,new} = \partial_u$, on définit de nouvelles variables canoniques, *u* et *v* inversées :

$$v^5 v_{uu} = 3v^4 v_u^2 + v_u^3 \qquad \Leftrightarrow \qquad v^5 u_{vv} + 3v^4 u_v + 1 = 0 \qquad \overset{w=u_v}{\Rightarrow} \qquad v^5 w_v + 3v^4 w + 1 = 0$$

Cette dernière équation n'est plus que d'ordre un et elle possède encore la symétrie, $\frac{1}{v^3}\partial_w$, d'où l'existence du facteur intégrant, $1/v^2$. Sa solution s'écrit :

$$v^3 w - \frac{1}{v} = C_1 \qquad \overset{w=x_v}{\Rightarrow} \qquad x = -\frac{C_1}{2v^2} - \frac{1}{3v^3} + C_2$$

Il "reste" à résoudre cette équation cubique par rapport à, $v=v(x)$, et à l'intégrer,

$$v = y_x \qquad \Rightarrow \qquad y = \int v(x)dx + C_3$$

On aurait réglé le problème plus facilement en partant de X_1. On aurait trouvé, par inversion des variables :

$$y_x^5 y_{xxx} = 3y_x^4 y_{xx}^2 + y_{xx}^3 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_{yyy} = x_{yy}^3$$

une équation facile à résoudre puisqu'elle possède la symétrie, ∂_y, comme sa réduite d'ailleurs. Il suffit dès lors de poser, $u = x_{yy}$ pour obtenir la solution finale :

$$x_{yyy} = x_{yy}^3 \overset{u=x_{yy}}{\Rightarrow} u_y = u^3 \qquad \Rightarrow \qquad x_{yy} = \pm\frac{1}{\sqrt{2C_1 - y}} \quad \Rightarrow \quad x = C_2 + C_3 y \pm \frac{\sqrt{8}}{3}(C_1 - y)^{3/2}$$

Deuxième exemple. Soit l'équation,

$$2y_{xxx}y_x - 3y_{xx}^2 = yy_x^4$$

Elle possède trois symétries ponctuelles de générateurs,

$$X_1 = \partial_x \qquad X_2 = x\partial_x \qquad X_3 = x^2\partial_x$$

Commençons la réduction avec la symétrie la plus simple, celle générée par X_1. Elle demande de permuter les variables dépendante et indépendante selon le schéma connu :

$$2y_{xxx}y_x - 3y_{xx}^2 = yy_x^4 \qquad \Rightarrow \qquad 2x_y x_{yyy} - 3x_{yy}^2 + yx_y^2 = 0 \qquad \overset{\substack{u=y\\ v=x_y}}{\Rightarrow} \qquad 2vv_{uu} - 3v_u^2 + uv^2 = 0$$

Que sont devenus X_2 et X_3 ?

$$X_{old,2}^{(1)} = x\partial_x + 0\partial_y - y_x\partial_{y_x} \qquad \rightarrow$$
$$((x\partial_x + 0\partial_y - y_x\partial_{y_x})y)\partial_u + ((x\partial_x + 0\partial_y - y_x\partial_{y_x})\frac{1}{y_x})\partial_v = -y_x\frac{-1}{y_x^2}\partial_v = v\partial_v$$

$$X_{old,3}^{(1)} = x^2\partial_x + 0\partial_y - 2xy_x\partial_{y_x} \qquad \rightarrow$$
$$((x^2\partial_x + 0\partial_y - 2xy_x\partial_{y_x})y)\partial_u + ((x^2\partial_x + 0\partial_y - 2xy_x\partial_{y_x})\frac{1}{y_x})\partial_v = \frac{2x}{y_x}\partial_v = 2\left(\int vdu\right)v\partial_v$$

En résumé :

La symétrie initialement associée à X_1 a été consommée et elle a normalement disparu.
La symétrie initialement associée à X_2 subsiste.
La symétrie initialement associée à X_3 n'a pas vraiment disparu mais elle a cessé d'être locale.

Au bilan, il ne subsiste plus assez de symétries ponctuelles pour espérer poursuivre la réduction jusqu'à son terme.

La seule réduction encore possible correspond à, $v\partial_v$. Les variables canoniques correspondant à ce générateur sont :

$$\begin{cases} s = \ell nv \\ r = u \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} v = e^s \\ u = r \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2s_{rr} + s_r^2 + r = 0 \qquad \overset{w=s_r}{\Rightarrow} \qquad 2w_r - w^2 + r = 0$$

L'équation résiduelle possède bien la symétrie, $2\partial_r + (w^2 - r)\partial_w$, mais elle est inutilisable car le facteur intégrant qu'on en déduit est identiquement nul. En résumé, on a ramené l'équation de départ à une équation du premier ordre plus deux quadratures.

Etat des symétries lors d'une réduction d'ordre : étude algébrique.

Aussi étrange que cela puisse paraître, les symétries non locales ne sont pas connues depuis si longtemps, les références les plus anciennes remontant apparemment aux travaux d'Olver dans les années 1980. Avant cela, la discussion de la solubilité des équations différentielles par la méthode de Lie reposait essentiellement sur des considérations algébriques. Nous les évoquons sans entrer dans trop de détails.

L'ensemble des générateurs, X_i *(i=1, ..., R)*, des symétries ponctuelles d'une équation différentielle possède une propriété tout à fait remarquable : tout commutateur non nul de deux générateurs est encore un générateur. Comme ceux-ci forment une base, on peut écrire (en appliquant la convention de sommation sur les indices répétés) :

$$[X_i, X_j] = c_{i,j}^k X_k$$

On note, au passage, que les coefficients constants, c, ne dépendent en aucune manière du fait que l'on calcule les commutateurs sur base des générateurs simples ou prolongés.

Il est possible d'associer à tout groupe de Lie, possédant R générateurs, une algèbre (de Lie) qui est résumée dans sa table de commutation, nécessairement antisymétrique. Tous les générateurs ne sont pas nécessairement présents dans cette table et il se peut même qu'il n'y en ait aucun si l'algèbre est commutative. Voici l'algèbre de Lie du groupe des rotations dans R_3 , calculée pour l'exemple à la section 5 du Notebook :

$[\,,\,]$	$X_1 = y\partial_z - z\partial_y$	$X_2 = z\partial_x - x\partial_z$	$X_3 = x\partial_y - y\partial_x$
$X_1 = y\partial_z - z\partial_y$	0	X_3	$-X_2$
$X_2 = z\partial_x - x\partial_z$	$-X_3$	0	X_1
$X_3 = x\partial_y - y\partial_x$	X_2	$-X_1$	0

L'intérêt de cette table provient de ce que lorsqu'on réduit l'ordre d'une équation en utilisant la symétrie de générateur, X_p, les autres symétries, X_a, qui respectent le critère :

$$[X_a, X_p] = C^{te} X_p$$

(la constante pouvant être nulle), subsistent à coup sûr au niveau de l'équation réduite. Si cette relation n'est pas satisfaite la symétrie, X_a, cesse d'être locale.

On appelle sous-groupe dérivé le groupe obtenu en ne retenant que les générateurs présents dans la table. Ce sous-groupe possède également son algèbre de Lie à laquelle correspond une table de commutation donc également un sous-groupe dérivé et ainsi de suite. Le groupe de départ est dit soluble si la chaîne des sous-groupes dérivés se termine sur le groupe identité. Il est non soluble dans le cas contraire. Cette appellation un peu maladroite, nous verrons ultérieurement pourquoi, se réfère au théorème suivant, dû à Lie :

Une équation différentielle d'ordre, N, possédant R symétries ponctuelles formant un groupe soluble peut être ramenée à une équation d'ordre, N-R, plus R quadratures. En particulier, si R≥N, l'équation initiale est complètement soluble en termes de quadratures.

Cas particuliers. Tout groupe commutatif est soluble puisque sa table de commutation est identiquement nulle : le sous-groupe dérivé ne contient que l'identité. On démontre également que tout groupe d'ordre, $R=2$, est également soluble. La question de la non solubilité ne se pose donc qu'à partir de l'ordre, $N=3$.

Exemple d'un groupe soluble. L'équation,

$$y_{xxx} = \frac{y_{xx}^2}{y_x} + y_{xx}$$

possède trois symétries ponctuelles formant un groupe soluble (de chaîne, $\{X_1, X_2, X_3\} \to \{X_2\} \to \{0\}$) :

$$X_1 = \partial_x \qquad X_2 = \partial_y \qquad X_3 = y\partial_y$$

$[\,,\,]$	$X_1 = \partial_x$	$X_2 = \partial_y$	$X_3 = y\partial_y$
$X_1 = \partial_x$	0	0	0
$X_2 = \partial_y$	0	0	X_2
$X_3 = y\partial_y$	0	$-X_2$	0

Si on réduit en commençant par X_1, X_2 et X_3 subsistent et la réduction peut être poursuivie,
Si on réduit en commençant par X_2, X_1 et X_3 subsistent et la réduction peut être poursuivie,
Si on réduit en commençant par X_3, X_1 subsiste et X_2 disparaît; la méthode de Lie risque d'échouer avant la réduction finale.

A l'usage, c'est en commençant par X_1 que l'on parvient le plus vite à la solution :

$$y_{xxx} = \frac{y_{xx}^2}{y_x} + y_{xx} \quad \Rightarrow \quad x_{yyy} = 2\frac{x_{yy}^2}{x_y} + x_y x_{yy} \quad \overset{u=x_y}{\Rightarrow} \quad u_{yy} = 2\frac{u_y^2}{u} + uu_y \quad \Rightarrow$$

$$-y_{uu} = 2\frac{y_u}{u} + uy_u^2 \quad \overset{z=y_u}{\Rightarrow} \quad -z_u = 2\frac{z}{u} + uz^2$$

Cette dernière équation s'intègre sous la forme finie,

$$z = \frac{1}{u^2(c_1 + \ell n|u|)}$$

Il "reste" à retourner aux variables d'origine par quadratures successives,

$$\frac{dy}{du} = z \quad \Rightarrow \quad y = \int \frac{du}{u^2(c_1 + \ell n|u|)} = e^{c_1} Ei(-c_1 - \ell n|u|) + c_2 \quad \Rightarrow \quad u = u(y)$$

$$\frac{dx}{dy} = u(y) \quad \Rightarrow \quad x = \int u(y)dy + c_3$$

Exemple d'un groupe non soluble. L'équation de Chazy,

$$y_{xxx} + yy_{xx} - \frac{3}{2}y_x^2 = 0$$

possède trois symétries ponctuelles formant un groupe non soluble (de chaîne, $\{X_1, X_2, X_3\} \rightarrow \{X_1, X_2, X_3\} \rightarrow \cdots$) :

$$X_1 = \partial_x \qquad X_2 = x\partial_x - y\partial_y \qquad X_3 = x^2\partial_x + (12 - 2xy)\partial_y$$

$[\,,\,]$	$X_1 = \partial_x$	$X_2 = x\partial_x - y\partial_y$	$X_3 = x^2\partial_x + (12 - 2xy)\partial_y$
$X_1 = \partial_x$	0	X_1	$2X_2$
$X_2 = x\partial_x - y\partial_y$	$-X_1$	0	X_3
$X_3 = x^2\partial_x + (12 - 2xy)\partial_y$	$-2X_2$	$-X_3$	0

Si on réduit en commençant par X_1, X_2 subsiste et X_3 disparaît,
Si on réduit en commençant par X_2, X_1 et X_3 disparaissent,
Si on réduit en commençant par X_3, X_2 subsiste et X_1 disparaît.

On constate que si on cherche à réduire l'équation, commencer par X_2 est le mauvais choix. Commencer par X_1 ou X_3 est un peu mieux mais il est probable que l'on se trouvera bloqué à l'étape suivante par manque de symétries ponctuelles.

L'appellation (non) soluble est trompeuse : elle n'a de sens qu'à la condition de ne pas sortir du cadre des transformations ponctuelles locales. Il est parfaitement possible qu'une équation déclarée insoluble par le théorème de Lie soit soluble par quadratures par le jeu de l'intervention de symétries non locales. C'est précisément le cas de l'équation de Chazy qui est réductible à trois quadratures en commençant la réduction sur base de X_2 ! Le lecteur intéressé se référera au travail de Leach et Andriopoulos (Nonlocal Symmetries, past present and future, Applicable Analysis and Discrete Mathematics: 1 (2007), 150–171. http://pefmath.etf.bg.ac.yu).

Un autre exemple célèbre est celui de la famille d'équations (p et $f(x)$ quelconques),

$$y_{xx} = \frac{y_x^2}{y} + f'(x)y^{p+1} + pf(x)y^p y_x$$

qui ne possèdent aucune symétrie ponctuelle locale et qui ont cependant été complètement intégrées par Nucci. Evidemment cette équation possède des symétries non locales qui ont pu être exploitées à cette fin. Ceci démontre que, dans sa forme primitive, la théorie de Lie est trop exigeante quand à la définition d'une symétrie. Nous verrons ultérieurement comment l'étendre (symétries dynamiques) mais les symétries non locales sont une première piste.

Apparition d'une symétrie.

Nous avons vu que certaines symétries disparaissaient ou plus exactement perdaient leur caractère local. Juste retour des choses, la situation inverse se présente également : une équation différentielle peut présenter une symétrie non locale qui devient locale lorsqu'on la réduit au moyen d'une symétrie annexe. Voici l'exemple de l'équation,

$$2yy_{xxxx}+5y_xy_{xxx}=0$$

Elle possède trois symétries ponctuelles de générateurs,

$$X_1=\partial_x \qquad X_2=x\partial_x \qquad X_3=y\partial_y$$

Si on la réduit en utilisant la symétrie, X_1, on trouve après permutation des variables dépendante et indépendante et position de $x_y=v$:

$$2yy_{xxxx}+5y_xy_{xxx}=0 \qquad \overset{\substack{u=y\\ v=x_y}}{\Rightarrow} \qquad 15vv_u^2-30uv_u^3-5v^2v_{uu}+20uvv_uv_{uu}-2uv^2v_{uuu}=0$$

Si on cherche ses symétries ponctuelles, on a la surprise d'en découvrir trois,

$$Y_1=v\partial_v \qquad Y_2=u\partial_u \qquad Y_3=2u^2\partial_u-uv\partial_v$$

ce qui est inattendu puisqu'on a consommé la symétrie X_1. Quelle est l'intruse apparue "spontanément" ? Nous allons montrer que c'est Y_3.

$$X^{(1)}_{old,2}=x\partial_x+0\partial_y-y_x\partial_{y_x} \qquad \rightarrow$$

$$((x\partial_x+0\partial_y-y_x\partial_{y_x})y)\partial_u+((x\partial_x+0\partial_y-y_x\partial_{y_x})\frac{1}{y_x})\partial_v=-y_x\frac{-1}{y_x^2}\partial_v=v\partial_v$$

$$X^{(1)}_{old,3}=0\partial_x+y\partial_y+y_{xx}\partial_{y_x} \qquad \rightarrow$$

$$((0\partial_x+y\partial_y+y_{xx}\partial_{y_x})y)\partial_u+((0\partial_x+y\partial_y+y_x\partial_{y_x})\frac{1}{y_x})\partial_v=u\partial_u-v\partial_v$$

En résumé :

La symétrie initialement associée à X_1 a été consommée et elle a normalement disparu.
Les symétries initialement associées à X_2 et X_3 subsistent. Notez la combinaison, $u\partial_u-v\partial_v$.
La symétrie, Y_3, parfaitement utilisable pour la résolution de l'équation, semble sortir de nulle part. En fait l'équation de départ possédait une symétrie non locale, de générateur, X_4, qui est devenue locale lors de la réduction :

$$X^{(1)}_{old,4}=3\left(\int ydx\right)\partial_x+2y^2\partial_y+yy_x\partial_{y_x} \qquad \rightarrow$$

$$((3\left(\int ydx\right)\partial_x+2y^2\partial_y+yy_x\partial_{y_x})y)\partial_u+((3\left(\int ydx\right)\partial_x+2y^2\partial_y+yy_x\partial_{y_x})\frac{1}{y_x})\partial_v$$

$$=2u^2\partial_u-uv\partial_v$$

La méthode des invariants différentiels.

La méthode exposée de réductions successives d'ordre par recours aux variables canoniques fonctionne mais elle n'est pas un modèle d'élégance. Elle souffre, en particulier, de l'inconvénient de devoir prêter attention à l'ordre dans lequel on utilise les générateurs. Certes le théorème de Lie nous renseigne à ce sujet mais sa portée est limitée par le fait que certaines symétries locales peuvent apparaître ou disparaître. Si l'on veut ne manquer aucune possibilité il ne reste plus qu'à essayer toutes les combinaisons dans le brouillard.

La méthode des invariants différentiels court-circuite les problèmes de préséance entre les opérateurs de symétrie. En particulier, lorsque le nombre des symétries ponctuelles est inférieur à l'ordre de l'équation, $R<N$, elle isole clairement la composante de la résolution de l'équation différentielle qui est justiciable de la méthode de Lie de l'autre qui lui est étrangère.

Les invariants différentiels permettent également de résoudre le problème inverse : trouver la forme générale de l'équation d'ordre, N, qui admet un jeu donné de symétries. Il faut comprendre que les regards que physiciens et mathématiciens posent sur la théorie des équations différentielles sont quelque peu différents :

- Le physicien est généralement intéressé par la résolution de l'équation qui se présente à lui lors de l'étude de l'évolution d'un système physique particulier. Etant donné une équation, il s'intéresse à l'ensemble des symétries que cette équation présente.

- Le mathématicien n'ayant aucune raison de privilégier une équation particulière, ce qu'il veut c'est épuiser tous les cas de solubilité. L'idée vient alors naturellement de passer en revue tous les groupes non isomorphes et de chercher pour chacun la forme générale de l'équation différentielle qui admet ce groupe de symétrie.

Les invariants différentiels apportent la solution idéale aux problèmes direct et inverse.

On appelle invariant différentiel, d'ordre, k (= 0, 1, 2, ...), associé à une symétrie ponctuelle de générateur, X, toute expression, $\phi^{(k)} = \phi(x, y, y', y'', \cdots, y^{(k)})$, qui annule la prolongation d'ordre, k, de ce générateur :

$$X^{(k)} = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta^{(1)}\partial_{y'} + \eta^{(2)}\partial_{y''} + \cdots + \eta^{(k)}\partial_{y^{(k)}} \quad \Rightarrow \quad X^{(k)}\phi^{(k)}(x, y, y', y'', \cdots, y^{(k)}) = 0$$

On appelle invariant différentiel, d'ordre, k (= 0, 1, 2, ...), associé à un ensemble de symétries ponctuelles, toute expression, $\phi^{(k)} = \phi(x, y, y', y'', \cdots, y^{(k)})$, qui annule simultanément les prolongations d'ordre, k, des générateurs correspondants :

$$X_i^{(k)} = \xi_i\partial_x + \eta_i\partial_y + \eta_i^{(1)}\partial_{y'} + \eta_i^{(2)}\partial_{y''} + \cdots + \eta_i^{(k)}\partial_{y^{(k)}} \quad \overset{i=1,\cdots,R}{\Rightarrow} \quad X_i^{(k)}\phi^{(k)}(x, y, y', y'', \cdots, y^{(k)}) = 0$$

Insistons sur ce fait qu'on reconnaît l'ordre d'un invariant à la plus haute dérivée qui intervient dans sa définition.

Il peut arriver qu'aucun invariant n'existe à un ordre spécifié, nous verrons des exemples dans un instant. Quoi qu'il en soit, en progressant dans l'ordre, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$, les deux premiers invariants non triviaux trouvés, notés, ψ et φ dans cet ordre, jouent un rôle particulier, on les appelle invariants fondamentaux.

A part la méthode des caractéristiques dont nous verrons des exemples, il n'existe aucune procédure effective garantissant de trouver explicitement ces invariants fondamentaux. Toutefois dès que, $\phi^{(0)} = \psi$ et $\phi^{(1)} = \varphi$, sont trouvés, les autres suivent facilement, simplement donnés par les relations : $\phi^{(j+1)} = d^j\varphi / d\psi^j \quad (j = 1,2,\cdots)$.

L'importance de ces invariants provient du théorème suivant.

Etant donné un ensemble de symétries ponctuelles, X_i, dont on connaît les invariants fondamentaux, les expressions suivantes,

$$\varphi = F(\psi), \;\; \frac{d\varphi}{d\psi} = F(\psi,\varphi), \;\; \frac{d^2\varphi}{d\psi^2} = F(\psi,\varphi,\frac{d\varphi}{d\psi}), \;\; etc \;\; \cdots$$

où l'on effectue les remplacements de, ψ et φ, en fonction de x, de y et des dérivées $y^{(k)}$, incarnent, aux ordres croissants, les familles d'équations différentielles qui possèdent précisément ces symétries.

Ecrites en terme des variables, ψ et φ, ces équations sont le produit ultime des réductions successives de toute équation d'ordre N possédant ces symétries. Elles ne présentent généralement plus ces symétries puisqu'elles ont été consommées.

Dans ce formalisme, le problème direct de la résolution d'une équation imposée, d'ordre, N. présentant un ensemble de symétries, se décompose donc en deux équations :

1) Une équation d'ordre, N-i, en ψ et φ (où i est l'ordre de φ), appartenant fatalement à une des familles décrites ci-dessus. Sauf le cas algébrique, qui est immédiat, il faut pouvoir résoudre cette équation sous la forme, $\varphi = F(\psi)$. C'est la partie difficile du problème car l'équation réduite ne possède généralement plus les symétries consommées lors des réductions successives. Les équations différentielles qui résistent à une réduction complète sont précisément celles qui butent sur une équation en ψ et φ dépourvue de symétries.

2) Supposons que nous connaissions la solution de l'équation à l'étape 1, sous la forme, $\varphi = F(\psi)$. C'est également une équation différentielle, d'ordre, i, en les variables x et y. Cette partie du problème est, en principe, plus simple puisque cette équation possède, par construction, les symétries initiales. Elle est donc complètement réductible grâce à elles. Des exemples sont indispensables à ce stade.

Avant d'y venir, il faut préciser un point important qui est en rapport avec l'usage que l'on fait des invariants. Lorsque ϕ est un invariant différentiel, n'importe quelle fonction de ϕ l'est encore, c'est une conséquence de la définition. Il importe peu quel choix on fait mais il est naturel d'opter pour le plus simple vu que cela n'entrave pas la généralité de la théorie. De même, si on trouve que yy_x est invariant d'ordre un alors qu'on sait déjà que y est invariant d'ordre zéro, alors autant remplacer yy_x par y_x. Dans les exemples qui suivent le symbole $\overset{réduction}{\Rightarrow}$ signifie que nous avons eu recours à cette simplification. Le seul critère qui doit impérativement être respecté est que ψ et φ soient indépendants.

Exemples. Considérons le ou les générateurs suivants, prolongés pour les besoins :

1) $X = \partial_x$

Ordre zéro : $\partial_x \phi^{(0)}(x,y) = 0 \quad \overset{réduction}{\Rightarrow} \quad \phi^{(0)} = \psi = y$

Ordre un : $\partial_x \phi^{(1)}(x,y,y_x) = 0 \quad \overset{réduction}{\Rightarrow} \quad \phi^{(1)} = \varphi = y_x$ (donc $i=1$)

Ordre deux : $\phi^{(2)} = \dfrac{d\varphi}{d\psi} = \dfrac{dy_x}{dy} = \dfrac{dy_x}{dx}\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y_{xx}}{y_x}$ etc ...

L'équation algébrique, $\varphi = F(\psi) \;\rightarrow\; y_x = F(y)$, est l'équation générale d'ordre un possédant, $X = \partial_x$, comme symétrie ponctuelle.

De même, l'équation d'ordre un, $\dfrac{d\varphi}{d\psi} = F(\psi,\varphi) \;\rightarrow\; y_{xx} = F(y,y_x)$, livre l'équation d'ordre deux la plus générale possédant, $X = \partial_x$, comme symétrie ponctuelle.

Et ainsi de suite aux ordres successifs. Le résultat obtenu était prévisible vu la simplicité de la symétrie, $X = \partial_x$: il suffit que x soit absent de l'équation.

Illustration : $y_{xx} = yy_x^2$

Puisqu'elle fait partie de la famille des équations d'ordre deux, elle doit pouvoir se réécrire, au premier ordre (*N-i=1 !*), en terme des invariants fondamentaux. De fait, on a :

$$y_{xx} = yy_x^2 \quad \underset{i=1}{\overset{N-i=1}{\Rightarrow}} \quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{d\psi} = \psi\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = f(\psi) \quad \overset{ici}{\Rightarrow} \quad \varphi = ce^{\psi^2/2} \\ \begin{cases} \psi = y \\ \varphi = y_x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = ce^{y^2/2} \quad \overset{ici}{\Rightarrow} \quad x = c_1 + c_2 \displaystyle\int e^{-y^2/2} dy \end{cases}$$

2) $X = x\partial_x + y\partial_y + 0\partial_{y_x} - y_{xx}\partial_{y_{xx}}$

Ordre zéro : $(x\partial_x + y\partial_y)\phi^{(0)}(x,y) = 0 \quad \overset{réduction}{\Rightarrow} \quad \phi^{(0)} = \psi = y/x$

Ordre un : $(x\partial_x + y\partial_y + 0\partial_{y_x})\phi^{(1)}(x,y,y_x) = 0 \quad \overset{réduction}{\Rightarrow} \quad \phi^{(1)} = \varphi = y_x$ (donc $i=1$)

Ordre deux : $\phi^{(2)} = \dfrac{d\varphi}{d\psi} = \dfrac{y_{xx}dx}{dy/x - ydx/x^2} = \dfrac{x^2 y_{xx}}{xy_x - y} \quad \overset{réduction}{\Rightarrow} \quad \phi^{(2)} = xy_{xx}$ etc ...

L'équation algébrique, $\varphi = F(\psi) \;\rightarrow\; y_x = F(y/x)$, livre l'équation générale d'ordre un possédant, $X = x\partial_x + y\partial_y$, comme symétrie ponctuelle.

De même, l'équation d'ordre un, $\dfrac{d\varphi}{d\psi} = F(\psi,\varphi) \;\rightarrow\; xy_{xx} = F(y/x, y_x)$, livre l'équation générale d'ordre deux possédant, $X = x\partial_x + y\partial_y$, comme symétrie ponctuelle et ainsi de suite.

Illustration : $x^2 y_{xx} + xy_x^2 = yy_x$

$$x^2 y_{xx} + xy_x^2 = yy_x \quad \underset{i=1}{\overset{N-i=1}{\Rightarrow}} \quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{d\psi} = \dfrac{\psi\varphi - \varphi^2}{\varphi - \psi} \quad \Rightarrow \quad \varphi = f(\psi) \quad \overset{ici}{\Rightarrow} \quad \varphi = ce^{-\psi} \\ \begin{cases} \psi = y/x \\ \varphi = y_x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = ce^{-y/x} \end{cases}$$

L'équation, $y_x = ce^{-y/x}$, peut sembler antipathique mais elle conserve la symétrie, $X = x\partial_x + y\partial_y$, par le principe même de la méthode des invariants. Elle possède donc un facteur intégrant, $1/(\eta - \omega\xi) = 1/(y - c_1 xe^{-y/x})$, qui mène à la solution implicite,

$$\frac{dy}{y - c_1 xe^{-y/x}} - \frac{c_1 e^{-y/x} dx}{y - c_1 xe^{-y/x}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ell n(x) = \int \frac{dy}{c_1 e^{-y} - y} + c_2$$

On note que cette procédure cesse d'être valable si, $\varphi = \psi$, autrement dit si, $y_x = y/x$. De fait, $y = cx$ est solution singulière de l'équation proposée (elle ne dépend que d'une seule constante d'intégration).

3) $\begin{array}{l} X_1 = \partial_x \\ X_2 = x\partial_x - y\partial_y - 2y_x\partial_{y_x} - 3y_{xx}\partial_{y_{xx}} - 4y_{xxx}\partial_{y_{xxx}} \end{array}$

Voici un cas où aucun invariant n'existe à l'ordre zéro : seule une constante satisfait la définition de $\phi^{(0)}$ et une constante n'est qu'un invariant trivial. Il convient donc de poursuivre la recherche aux ordres plus élevés.

Ordre zéro : $\begin{cases} \partial_x \phi^{(0)}(x,y) = 0 \\ (x\partial_x - y\partial_y)\phi^{(0)}(x,y) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad$ *néant*

Ordre un : $\begin{cases} \partial_x \phi^{(1)}(x,y,y_x) = 0 \\ (x\partial_x - y\partial_y - 2y_x\partial_{y_x})\phi^{(1)}(x,y,y_x) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \phi^{(1)}(x,y,y_x) = \psi = \dfrac{y_x}{y^2}$

Ordre deux :

$$\begin{cases} \partial_x \phi^{(2)}(x,y,y_x,y_{xx}) = 0 \\ (x\partial_x - y\partial_y - 2y_x\partial_{y_x} - 3y_{xx}\partial_{y_{xx}})\phi^{(2)}(x,y,y_x,y_{xx}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \; \phi^{(2)}(y,y_x,y_{xx}) = \varphi = \frac{y_{xx}}{y^3} \qquad (i{=}2)$$

Ordre trois :

$$\phi^{(3)} = d\varphi / d\psi = \frac{d\varphi / dx}{d\psi / dx} = \frac{d(y_{xx}/y^3)/dx}{d(y_x/y^2)/dx} = \frac{yy_{xxx} - 3y_x y_{xx}}{y(yy_{xx} - 2y_x^2)} \quad \overset{réduction}{\Rightarrow} \quad \phi^{(3)} = \frac{y_{xxx}}{y^4}$$

etc ...

Note. On détermine ces invariants moins évidents par la méthode dite des caractéristiques :

$$(y\partial_y + 2y_x\partial_{y_x})\phi(y, y_x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dy_x}{2y_x} \quad \Rightarrow \quad \phi^{(1)}(y, y_x) = \frac{y_x}{y^2}$$

$$(y\partial_y + 2y_x\partial_{y_x} + 3y_{xx}\partial_{y_{xx}})\phi(y, y_x, y_{xx}) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = \frac{dy_x}{2y_x} = \frac{dy_{xx}}{3y_{xx}} \;\Rightarrow\; \phi^{(2)}(y, y_x, y_{xx}) = \frac{y_{xx}}{y^3}$$

Aucune équation d'ordre un ne possède les symétries ponctuelles, X_1 et X_2, ($i=2$!).

L'équation algébrique, $\varphi = F(\psi) \;\rightarrow\; y_{xx}/y^3 = F(y_x/y^2)$, livre l'équation générale d'ordre deux possédant, X_1 et X_2, comme symétries ponctuelles.

De même, l'équation d'ordre un, $\frac{d\varphi}{d\psi} = F(\psi, \varphi) \;\rightarrow\; \frac{y_{xxx}}{y^4} = F(y_x/y^2, y_{xx}/y^3)$, livre l'équation d'ordre trois la plus générale possédant, X_1 et X_2, comme symétries ponctuelles. Et ainsi de suite aux ordres successifs.

Illustration : $y_{xxx} = yy_{xx} - y_x^2$

$$y_{xxx} = yy_{xx} - y_x^2 \quad \underset{i=2}{\overset{N-i=1}{\Rightarrow}} \quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{d\psi} = \dfrac{\varphi - \psi^2 - 3\varphi\psi}{\varphi - 2\psi^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = F(\psi) \quad \overset{ici}{\Rightarrow} \quad Abel \\ \begin{cases} \psi = y_x / y^2 \\ \varphi = y_{xx} / y^3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_{xx} = y^3 F(y_x / y^2) \end{cases}$$

On a ramené le problème à la résolution d'une équation réductible à la forme d'Abel, $w_t = a(t) + b(t)w + c(t)w^2 + d(t)w^3$, plus la résolution d'une équation soluble d'ordre deux, $y_{xx}/y^3 = F(y_x/y^2)$, possédant les symétries, X_1 et X_2.

On réduit cette équation en utilisant $X_1 = \partial_x$, par exemple, donc en inversant les variables dépendantes et indépendantes :

$$y_{xx}/y^3 = f(y_x/y^2) \quad \Rightarrow \quad x_{yy} = -y^3 x_y^3 f\left(\frac{1}{y^2 x_y}\right) \quad \overset{u=x_y}{\Rightarrow} \quad u_y = -y^3 u^3 f\left(\frac{1}{y^2 u}\right)$$

On peut poursuivre la réduction en utilisant X_2, maintenue à coup sûr, d'où l'existence d'un facteur intégrant. On voit, sur cet exemple, que la partie difficile du problème est bien la résolution de l'équation en ψ et φ sous la forme, $\varphi = F(\psi)$. Le fait que F soit solution de l'équation d'Abel peut sembler effrayant mais, outre qu'il n'y a pas moyen de faire autrement, sa définition la rend aussi honorable que la fonction sinus, solution de $y_x = \sqrt{1 - y^2}$!

$$X_1 = \partial_x$$

4) $X_2 = x\partial_x + 0\partial_y - y_x\partial_{y_x} - 2y_{xx}\partial_{y_{xx}} - 3y_{xxx}\partial_{y_{xxx}}$

$$X_3 = x^2\partial_x + 0\partial_y - 2xy_x\partial_{y_x} - 2(y_x + 2xy_{xx})\partial_{y_{xx}} - 6(y_{xx} + xy_{xxx})\partial_{y_{xxx}}$$

Voici un cas où un invariant existe à l'ordre zéro mais où il faut attendre l'ordre trois pour en trouver un deuxième.

Ordre zéro : $\begin{cases} \partial_x\phi^{(0)}(x,y) = 0 \\ x\partial_x\phi^{(0)}(x,y) = 0 \\ x^2\partial_x\phi^{(0)}(x,y) = 0 \end{cases} \quad \overset{réduction}{\Rightarrow} \quad \phi^{(0)} = \psi = y$

Ordre un : $\begin{cases} \partial_x\phi^{(1)}(x,y,y_x) = 0 \\ x\partial_x\phi^{(1)}(x,y,y_x) - y_x\partial_{y_x}\phi^{(1)}(x,y,y_x) = 0 \\ x^2\partial_x\phi^{(1)}(x,y,y_x) - 2xy_x\partial_{y_x}\phi^{(1)}(x,y,y_x) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \textit{néant}$

Ordre deux :

$$\begin{cases} \partial_x\phi^{(2)}(x,y,y_x,y_{xx}) = 0 \\ x\partial_x\phi^{(2)}(x,y,y_x,y_{xx}) - y_x\partial_{y_x}\phi^{(2)}(x,y,y_x,y_{xx}) - 2y_{xx}\partial_{y_{xx}}\phi^{(2)}(x,y,y_x,y_{xx}) = 0 \\ x^2\partial_x\phi^{(2)}(x,y,y_x,y_{xx}) - 2xy_x\partial_{y_x}\phi^{(2)}(x,y,y_x,y_{xx}) - 2(y_x + 2xy_{xx})\partial_{y_{xx}}\phi^{(2)}(x,y,y_x,y_{xx}) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \textit{néant}$$

A l'ordre trois, on trouve :

$\phi^{(3)}(x,y,y_x,y_{xx},y_{xxx}) = \varphi = 2\dfrac{y_{xxx}}{y_x^3} - 3\dfrac{y_{xx}^2}{y_x^4}$ (donc $i=3$)

etc ...

Il n'existe donc aucune équation différentielle d'ordre, $N<3$, qui possède à la fois X_1, X_2 et X_3 pour symétries. A l'ordre, $N=3$, elles sont toutes de la forme générale :

$$\varphi = F(\psi) \qquad \Rightarrow \qquad 2\frac{y_{xxx}}{y_x^3} - 3\frac{y_{xx}^2}{y_x^4} = F(y)$$

A l'ordre 4, elles seraient de la forme, $\dfrac{d\varphi}{d\psi} = F(\psi,\varphi)$, et ainsi de suite.

Illustration : $y_{xxx} = \dfrac{3}{2}\dfrac{y_{xx}^2}{y_x}$

est à coup sûr la plus simple de toutes (correspondant à, $F=0$). Le lecteur peut s'exercer à la réduire complètement. Sa solution finale s'écrit,

$$y = \frac{4 + c_1c_3(c_2 - x)}{c_1(c_2 - x)}$$

5) $X=-y\partial_x + x\partial_y + (1+y_x^2)\partial_{y_x} + 3y_x y_{xx}\partial_{y_{xx}} + (3y_{xx}^2 + 4y_x y_{xx})\partial_{y_{xxx}}$

Nous citons cet exemple car il correspond au cas célèbre d'une symétrie par rotation dans le plan. Les invariants différentiels sont :

Ordre zéro : $(-y\partial_x + x\partial_y)\phi^{(0)}(x,y)=0 \quad \overset{réduction}{\Rightarrow} \quad \phi^{(0)}=\psi=\sqrt{x^2+y^2}$

Ordre un : $(-y\partial_x + x\partial_y + (1+y_x^2)\partial_{y_x})\phi^{(1)}(x,y,y_x)=0 \quad \Rightarrow \quad \phi^{(1)}=\varphi=\dfrac{xy_x-y}{x+yy_x}$ ($i=1$)

Ordre deux : $\phi^{(2)}=\dfrac{d\varphi}{d\psi} \quad \overset{réduction}{\Rightarrow} \quad \phi^{(2)}=\dfrac{y_{xx}}{(1+y_x^2)^{3/2}}$ etc ...

Les équations générales invariantes par rotation dans le plan se notent donc :

à l'ordre 1 : $\dfrac{xy_x-y}{x+yy_x}=F(\sqrt{x^2+y^2})$

à l'ordre 2 : $y_{xx}=(1+y_x^2)^{3/2}F(\sqrt{x^2+y^2},\dfrac{xy_x-y}{x+yy_x})$

etc…

Parvenu à ce stade, on peut imaginer la stratégie suivante, de nature à inventorier les cas de solubilité des équations différentielles par la méthode des symétries ponctuelles. Pour les valeurs successives, $N=2, 3, 4, \ldots$, on construit toutes les algèbres de Lie possibles et non isomorphes (en fait les tables de commutation) sachant que R≤8 si N=2 et que R≤N+4 sinon. Ce programme de recherche systématique ne se termine évidemment jamais mais il a été amorcé par Ibragimov.

Lorsque les symétries sont en nombre suffisant, typiquement, $R \geq N$, une troisième approche d'une rare élégance est possible, basée sur la détermination des intégrales premières. C'est elle qui va à présent nous occuper.

Application de la méthode de Lie à la recherche des intégrales premières.

La méthode des réductions successives de l'ordre est mal adaptée à la recherche des intégrales premières d'une équation différentielle. Il faut trouver autre chose et le fait est que plusieurs méthodes sont disponibles. Nous en avons retenu deux, dédicacées aux cas distincts, $R \leq N$ et $R > N$.

Rappelons que toute intégrale première, I, est solution de l'équation :

$$AI=(\partial_x + y'\partial_y + y''\partial_{y'} + \cdots + y^{(N-1)}\partial_{y^{(N-2)}} + \omega\partial_{y^{(N-1)}})I=0$$

Le cas, $R>N$, est, sans surprise, le plus favorable à la détermination des intégrales premières d'une équation, d'ordre, N. Le cas, $R\leq N$, est plus difficile car on est en manque de symétries. C'est pourtant par lui que nous commençons.

1er cas : $R\leq N$. Equation co-caractéristique.

Cette approche est basée sur la généralisation de la notion de facteur intégrant déjà utilisé à l'ordre, $N=1$. Un facteur, Λ, est intégrant pour une équation différentielle ordinaire s'il permet, par simple multiplication, de la réécrire comme la différentielle totale d'une expression, I, nécessairement constante :

$$y^{(N)}-\omega(x,y,y',\cdots,y^{(N-1)})=0 \qquad \Rightarrow \qquad (y^{(N)}-\omega(x,y,y',\cdots,y^{(N-1)}))\Lambda=D_xI=0$$

On montre que ce facteur intégrant est solution de l'équation co-caractéristique,

$$A^N\Lambda+A^{N-1}(\omega_{y^{(N-1)}}\Lambda)-A^{N-2}(\omega_{y^{(N-2)}}\Lambda)+A^{N-3}(\omega_{y^{(N-3)}}\Lambda)-\cdots+(-1)^{N-1}\omega_y\Lambda=0$$

ou, pour rappel, $A=\partial_x+y'\partial_y+y''\partial_{y'}+\cdots+y^{(N-1)}\partial_{y^{(N-2)}}+\omega\partial_{y^{(N-1)}}$.

Signalons que l'inverse n'est pas obligatoirement vrai : toute solution Λ de cette équation n'est pas un facteur intégrant.

Il n'existe pas de méthode capable de résoudre l'équation en Λ en toute généralité mais cela n'est, heureusement, pas nécessaire car la question n'est pas de trouver tous les facteurs intégrants mais d'en trouver suffisamment qui soient indépendants. Une stratégie envisageable repose sur la recherche des facteurs qui ne dépendant pas de $y^{(N-1)}$. L'équation co-caractéristique éclate alors généralement en plusieurs morceaux plus ou moins faciles à résoudre exactement comme cela se passe lorsqu'on résout la condition de symétrie ponctuelle. On trouve les candidats "facteurs intégrants" en identifiant à zéro les coefficients des dérivées d'ordre inférieur à $N-1$ et en résolvant, comme on l'a toujours fait, un système surdéterminé d'équations linéaires.

Sur cette base, les expressions suivantes sont constantes ou intégrales premières :

$$\Phi=\sum_{k=0}^{N-1}P_kA^k(\eta-y_x\xi)$$

où les P_k se calculent récursivement comme suit :

$$P_{N-1}=\Lambda$$
$$P_{k-1}=-AP_k-\omega_{y^{(k)}}\Lambda \qquad (k=N-1,N-2,\cdots,1)$$

Il y a autant de "candidats intégrales premières" que d'expressions Φ résultant des combinaisons possibles entre les facteurs Λ trouvés et les symétries existantes, $X(\xi,\eta)$. Naturellement on s'arrête dès qu'on a trouvé N intégrales premières.

Un exemple est bienvenu à ce stade. Soit l'équation d'ordre, $N=3$,

$$y_{xxx} = 3yy_x$$

Elle ne possède que deux symétries ponctuelles, $X_1 = \partial_x$ et $X_1 = x\partial_x - 2y\partial_y$. Nous sommes donc bien dans le cas, $R<N$. L'équation en Λ se note :

$$A^3\Lambda - A(3y\Lambda) + 3y_x\Lambda = 0$$

Sa résolution (dont le détail figure à la section 6 du Notebook) indique qu'il n'existe que trois facteurs intégrants envisageables :

$$\Lambda_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad P_{1,0} = -3y \quad P_{1,1} = 0 \quad P_{1,2} = 1$$
$$\Lambda_2 = y \quad \Rightarrow \quad P_{2,0} = y_{xx} - 3y^2 \quad P_{2,1} = -y_x \quad P_{2,2} = y$$
$$\Lambda_3 = y_x^2 - y^3 \quad \Rightarrow \quad P_{3,0} = 2y_{xx}^2 - 3y^2y_{xx} - 3yy_x^2 + 3y^4 \quad P_{3,1} = 3y^2y_x - 2y_xy_{xx} \quad P_{3,2} = y_x^2 - y^3$$

Combinant les deux symétries et les trois facteurs intégrants potentiels, on ne trouve que deux combinaisons non trivialement constantes (en fait seuls Λ_1 et Λ_2 sont des facteurs intégrants et on peut montrer que Λ_3 ne satisfait pas aux égalités croisées) :

$$I_1 = \sum_{k=0}^{2} P_{1,k}A^k(\eta - y_x\xi) = \sum_{k=0}^{2} P_{1,k}A^k(-2y - y_x x) = 6y^2 - 4y_{xx}$$
$$I_2 = \sum_{k=0}^{2} P_{2,k}A^k(\eta - y_x\xi) = \sum_{k=0}^{2} P_{2,k}A^k(-2y - y_x x) = -6yy_{xx} + 6y^3 + 3y_x^2$$

Ces deux intégrales premières autonomes suffisent pour résoudre l'équation car éliminant y_{xx} entre elles, il ne reste qu'une équation du premier ordre soluble en terme de fonctions elliptiques :

$$y_x^2 = y^3 - \frac{I_1}{2}y - \frac{I_2}{3} \quad \Rightarrow \quad x = I_3 \pm \int \frac{dy}{\sqrt{y^3 - \frac{I_1}{2}y - \frac{I_2}{3}}}$$

On voit que la troisième intégrale première (I_3) n'est pas locale puisque pour tout x, elle intègre toutes les valeurs de y.

2ème cas : $R>N$.

Rien n'empêche d'appliquer la méthode précédente à ce cas mais le fait est qu'on peut faire beaucoup mieux. Dans ce cas, il existe suffisamment de symétries pour qu'on puisse espérer exprimer certains générateurs, X_i, comme combinaison linéaire, à coefficients variables, des opérateurs, A et X_j ($j=1, 2, \ldots, R, j\neq i$) :

$$X_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{R} f_jX_j + gA \qquad i \in \{1,2,\cdots,R\}$$

Lorsque cela est possible, on a que les coefficients, f_j, sont constants ou intégrales premières. Ce théorème surprenant vaut qu'on s'attarde, pour une fois, sur sa démonstration tant elle courte et élégante.

Théorème :

$$X_i = \sum_{a \neq i} f^{(a)} X_a + gA \qquad \Rightarrow \qquad Af^{(a)} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f^{(a)} = C^{te}$$

Preuve : on commence par calculer le commutateur des deux membres de l'hypothèse avec A. Cela donne :

$$[X_i, A] = \sum_{a \neq i} [f^{(a)} X_a, A] + [gA, A]$$

Vu que X_i est un générateur de symétrie, la condition de symétrie (2ème version) impose que son commutateur avec A rende A à une fonction près :

$$\lambda_i A = \sum_{a \neq i} (f^{(a)} X_a A - Af^{(a)} X_a) + (gAA - AgA) = \sum_{a \neq i} \left(f^{(a)} [X_a, A] - (Af^{(a)}) X_a \right) - (Ag) A$$

$$\lambda_i A = \sum_{a \neq i} \left(f^{(a)} \lambda_a \right) A - (Ag) A - \sum_{a \neq i} (Af^{(a)}) X_a$$

qui est une relation linéaire entre A et les X_a $(a \neq i)$: tous les coefficients doivent s'annuler donc, en particulier, $Af^{(a)}$, ce qui indique que $f^{(a)}$ est soit constant soit intégrale première.

Ce théorème a ceci de remarquable qu'il fournit des invariants sans exiger le moindre travail d'intégration ! Précisons qu'il se peut que la manœuvre échoue, soit qu'elle donne 0=0, soit qu'elle trouve plusieurs fois le même invariant ou des combinaisons d'invariants connus.

Exemple. Illustrons la méthode sur l'équation différentielle, d'ordre, $N=3$,

$$y_{xxx} = \frac{3}{2} \frac{y_{xx}^2}{y_x}$$

Cette équation possédant, $R=6(>3!)$, symétries de Lie,

$$X_1 = \partial_x \qquad X_2 = x\partial_x \qquad X_3 = x^2\partial_x \qquad X_4 = \partial_y \qquad X_5 = y\partial_y \qquad X_6 = y^2\partial_y$$

Afin de couvrir tous les cas, nous commençons par écrire la combinaison linéaire sans préciser quel générateur est exprimé en fonction des autres et de A :

$$\begin{aligned} & f_1\partial_x + f_2[x\partial_x - y_x\partial_{y_x} - 2y_{xx}\partial_{y_{xx}}] + f_3[x^2\partial_x - 2xy_x\partial_{y_x} - (2y_x + 4xy_{xx})\partial_{y_{xx}}] + \\ & f_4\partial_y + f_5[y\partial_y + y_x\partial_{y_x} + y_{xx}\partial_{y_{xx}}] + f_6[y^2\partial_y + 2yy_x\partial_{y_x} + (2y_x^2 + 2yy_{xx})\partial_{y_{xx}}] + \\ & \qquad\qquad g[\partial_x + y_x\partial_y + y_{xx}\partial_{y_x} + \frac{3}{2}\frac{y_{xx}^2}{y_x}\partial_{y_{xx}}] \equiv 0 \end{aligned}$$

soit, en notation matricielle ($W_{(N+1)\times(R+1)} \cdot \vec{f}_{R+1} = 0$) :

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y & y^2 & y_x \\ 0 & -y_x & -2xy_x & 0 & y_x & 2yy_x & y_{xx} \\ 0 & -2y_{xx} & -(2y_x + 4xy_{xx}) & 0 & y_{xx} & 2y_x^2 + 2yy_{xx} & \dfrac{3}{2}\dfrac{y_{xx}^2}{y_x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ g \end{pmatrix} = 0 \qquad \& \qquad f_i = -1$$

Les R premières colonnes de la matrice, W, reproduisent les composantes des prolongations des générateurs (limitées à l'ordre, $N-1$) et la $(R+1)^{ème}$ colonne affiche les composantes de l'opérateur, A.

Il reste à résoudre ce système, généralement sous déterminé, en posant un des, f_i, égal à, -1. En fonction du rang de W, seuls r coefficients, f_j $(j\neq i)$, seront calculés en fonction des $(R-r-1)$ autres. Les coefficients des $(R-r-1)$ coefficients f_k laissés arbitraires dans chaque f_j sont soit des constantes triviales soit des intégrales premières. On peut recommencer la procédure pour $(i=1, 2, \ldots, R)$ et on arrête les frais dès qu'on a trouvé N intégrales premières indépendantes.

On trouve, par ce procédé, une pléthore d'intégrales premières dont la plupart sont évidemment reliées entre elles. La section 6 du Notebook détaille les calculs dans le cas de l'exemple choisi. Six cas doivent être pris en considération correspondant chacun à une combinaison possible,

$$X_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{R} f_j X_j + gA \qquad i \in \{1,2,\cdots,R\}$$

Dans l'exemple, on dégage assez facilement trois intégrales premières algébriques indépendantes.

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{y_{xx}^2}{y_x^3} \\ I_2 = x + 2\dfrac{y_x}{y_{xx}} \\ I_3 = y - 2\dfrac{y_x^2}{y_{xx}} \end{cases}$$

Il suffit d'éliminer les dérivées entre ces trois relations pour obtenir la solution générale sous la forme :

$$y = \frac{4 + I_1 I_3 (I_2 - x)}{I_1 (I_2 - x)}$$

Complément : Intégrales premières non algébriques.

Le procédé qu'on vient de décrire est purement algébrique, ce qui est de nature à limiter la forme des intégrales trouvées. Dans les cas où on n'a pas le compte (N) d'intégrales premières, il existe un recours s'appuyant sur le fait que le(s) déterminant(s), $w = dtm(V_1, V_2, \cdots, V_R, A)_{(N+1)\times(N+1)}$ (extraits de W où l'on supprime R-N colonnes, au choix, parmi $V_1, \ldots, V_R$), obéissent à la relation,

$$D_x w = \omega_{y^{(N-1)}} w$$

Si $\omega_{y^{(N-1)}}$ est une différentielle exacte, $\omega_{y^{(N-1)}} = D_x U$, on a que les expressions,

$$\ell n|w| - U = C^{te}$$

sont des intégrales premières (peut-être triviales), à condition que w ne soit pas nul.

Exemple. Soit l'équation,

$$y_{xxx} = \frac{(3y_x - 1)y_{xx}^2}{y_x^2}$$

possédant quatre symétries ponctuelles, que l'on a prolongées à l'ordre, N-1=2 :

$$\begin{aligned}
X_1 &= \partial_x \\
X_2 &= \partial_y \\
X_3 &= y\partial_x + 0\partial_y - y_x^2\partial_{y_x} - 3y_x y_{xx}\partial_{y_{xx}} \\
X_4 &= x\partial_x + y\partial_y + 0\partial_{y_x} - y_{xx}\partial_{y_{xx}}
\end{aligned}$$

La méthode algébrique ne fournit que deux intégrales premières :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & y & x & 1 \\ 0 & 1 & 0 & y & y_x \\ 0 & 0 & -y_x^2 & 0 & y_{xx} \\ 0 & 0 & -3y_x y_{xx} & -y_{xx} & \dfrac{(3y_x - 1)y_{xx}^2}{y_x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ g \end{pmatrix} = 0$$

$$I_1 = x - y - \frac{y_x^2}{y_{xx}}$$

$$I_2 = -y + \frac{y_x^3}{y_{xx}}$$

Voyons si on peut trouver une troisième intégrale première non algébrique. On note d'emblée que,

$$\omega_{y^{(N-1)}} = \frac{2(3y_x - 1)y_{xx}}{y_x^2} = D_x(6\ell n|y_x| - \frac{2}{y_x}) \qquad \Rightarrow \qquad U = 6\ell n|y_x| - \frac{2}{y_x}$$

Si on supprime la 3ème colonne de la matrice, W, on trouve un déterminant, w, valant :

$$w = y_{xx}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \ell n(y_{xx}^2) - 6\ell n|y_x| - \frac{2}{y_x} = C^{te}$$

$$I_3 = \ell n|y_{xx}| - 3\ell n|y_x| - \frac{1}{y_x}$$

On aurait pu décider d'éliminer les colonnes *1*, *2* ou *4* mais cela n'aurait évidemment rien donné de nouveau.

A présent que l'on a trouvé trois invariants, on peut éliminer les dérivées, y_x et y_{xx}, et obtenir la solution de l'équation proposée sous forme implicite,

$$x = (I_1 - I_2 I_3) + y(1 - I_3) + (y + I_2)\ell n|y + I_2|$$

Etude des symétries des systèmes d'équations différentielles.

Il arrive fréquemment que les équations d'évolution d'un système physique se présentent naturellement non sous la forme d'une équation unique, d'ordre, *N*, mais sous la forme d'un système d'équations différentielles. Tel est le cas du système de Lorenz gouverné par les équations,

$$\begin{cases} x_t = \sigma(y - x) \\ y_t = rx - y - xz \\ z_t = xy - \beta z \end{cases}$$

Plusieurs questions se posent à ce sujet :

1- La théorie de Lie s'étend-elle aux systèmes ?

2- Est-il préférable de découpler ce système en une équation unique, par exemple en x,

$$xx_{ttt} - [x_t - (\sigma + \beta + 1)x]x_{tt} - (\sigma + 1)x_t^2 + [x^3 + \beta(\sigma + 1)x]x_t + \sigma[x^4 + \beta(1 - r)x^2] = 0$$

et de travailler sur cette équation d'ordre 3 ?

3- Les deux procédures sont-elles équivalentes ?

Ce sont les réponses à ces trois questions qui vont, à présent, nous occuper.

1) La théorie de Lie s'étend *en principe* aux systèmes. Considérons le système suivant ($y'=y_x$, afin d'alléger les notations),

$$y'_k = \omega_k(x, y_1, \cdots, y_N) \qquad (k = 1, \cdots, N)$$

Les générateurs des symétries éventuelles, prolongés une fois (cela suffit puisqu' aucune dérivée d'ordre supérieur n'est présente) se notent :

$$X^{(1)} = \xi(x, y_1, \cdots, y_N)\partial_x + \sum_{k=1}^{N} \eta_k(x, y_1, \cdots, y_N)\partial_{y_k} + \sum_{k=1}^{N} \eta_k^{(1)}(x, y_1, \cdots, y_N)\partial_{y'_k}$$

avec : $\eta_k^{(1)} = D_x\eta_k - y'_k D_x\xi$

Le système devant être globalement invariant, les N conditions de symétrie s'écrivent :

$$X^{(1)}(y'_k - \omega_k) = 0 \qquad (k = 1, \cdots, N) \qquad mod(y'_k = \omega_k)$$

Il semblerait que le problème soit résolu, livrant une réponse positive à la première question. Ce n'est pas tout à fait le cas. Les dérivées premières y'_k devant être remplacées par ω_k toutes les fois qu'elles apparaissent dans les calculs, on se trouve dans une situation qu'on a déjà connue lorsqu'on a étudié les symétries des équations d'ordre un : les N conditions de symétries représentent un ensemble d'équations plus difficiles à résoudre que le système de départ. Une infinité de symétries existent bien mais, à part le flair ou la chance, aucune méthode ne permet d'en trouver une seule à coup sûr.

2) Si l'on décide de découpler entièrement le système de départ en éliminant toutes les variables sauf une, on tombe sur une équation d'ordre N qui peut être traitée par la méthode de Lie. Comment se fait-il que les équations entièrement couplées ou découplées - porteuses de la même information - ne réagissent pas de la même façon au traitement de Lie ?

3) Pour comprendre pourquoi la réponse à la troisième question est nécessairement négative, voici comment on peut raisonner. Prenons, en fait, le problème à rebours et partons d'une équation d'ordre, N.

On sait qu'une telle équation peut toujours être ramenée à un système de n équations d'ordres, ν_i, tels que : $N = \sum_{i=1}^{n} \nu_i$. On rappelle, à titre d'exemple, comment s'y prendre pour la ramener à N équations d'ordres, $\nu_i = 1$. Il suffit d'introduire N-1 variables auxiliaires $(y_1 = y, y_2 = y', \cdots, y_{N-1} = y^{(N-2)}, y_N = y^{(N-1)})$:

$$y^{(N)} = \omega(x, y, y', \cdots, y^{(N-1)}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \vdots \\ y'_{N-1} = y_N \\ y'_N = \omega(x, y_1, \cdots, y_N) \end{cases}$$

Tout générateur de symétrie du système se note :

$$X^{(1)} = \xi(x, y_1, \cdots, y_N)\partial_x + \sum_{k=1}^{N} \eta_k(x, y_1, \cdots, y_N)\partial_{y_k} + \sum_{k=1}^{N} \eta_k^{(1)}(x, y_1, \cdots, y_N)\partial_{y'_k}$$

Revenant à l'équation originale d'ordre, *N*, tout se passe comme si les dérivées jusqu'à l'ordre, *N-1*, figuraient à présent dans l'écriture de ses générateurs de symétries :

$$X^{(1)} = \xi(x, y, y', \cdots, y^{(N-1)})\partial_x + \sum_{k=1}^{N} \eta_k(x, y, y', \cdots, y^{(N-1)})\partial_{y_k} + \sum_{k=1}^{N} \eta_k^{(1)}(x, y, y', \cdots, y^{(N-1)})\partial_{y'_k}$$

Les symétries ainsi définies existent bel et bien mais ce sont des symétries généralisées dont les transformations infinitésimales se notent :

$$\begin{aligned}
&\hat{x} = x + \varepsilon\xi(x, y, y', \cdots, y^{(N-1)}) \\
&\hat{y} = y + \varepsilon\eta(x, y, y', \cdots, y^{(N-1)}) \\
&\hat{y}_{\hat{x}} = y_x + \varepsilon\eta^{(1)}(x, y, y', \cdots, y^{(N-1)}) \\
&\vdots \\
&\hat{y}^{(k)} = y^{(k)} + \varepsilon\eta^{(k)}(x, y, y', \cdots, y^{(N-1)}) \qquad mod(y^{(N)} = \omega) \qquad (k = 1, \cdots, N-1)
\end{aligned}$$

on est très loin des transformations ponctuelles,

$$\begin{cases} \hat{x} = x + \varepsilon\xi(x, y) \\ \hat{y} = y + \varepsilon\eta(x, y) \end{cases}$$

ne faisant intervenir que les variables et non leurs dérivées.

Voilà l'équivalence que nous cherchions à définir en posant la troisième question : il est équivalent de chercher les symétries ponctuelles d'un système entièrement couplé en *N* équations du premier ordre ou de chercher les symétries généralisées d'une équation unique d'ordre *N* faisant intervenir des dérivées jusqu'à l'ordre, *N-1*. Sauf le flair ou la chance, la méthodologie de Lie échoue dans l'un et l'autre cas. Par contre, elle peut fonctionner :

- pour une équation unique d'ordre, *N*, si ses symétries généralisées ne font intervenir les dérivées que jusqu'à l'ordre, *N-2*, et

- pour un système différentiel s'il n'est pas entièrement couplé, autrement dit, s'il subsiste au moins une équation d'ordre supérieur à un.

Dans ces cas, la condition de symétrie éclate généralement en plusieurs fragments éventuellement plus faciles à résoudre individuellement.

On peut même se montrer moins restrictif et tolérer une dépendance linéaire voire quadratique des générateurs en $y^{(N-1)}$, l'essentiel étant qu'une contrainte existe. Qu'il faille poser des restrictions aux symétries généralisées n'a rien de vraiment surprenant. Plus on généralise la notion de symétrie moins celle-ci est utile pour distinguer les équations, à la limite toute équation devient symétrique et la méthode perd fatalement son utilité !

Symétries généralisées.

Bien que la théorie analytique de Lie ait été initialement construite sur les transformations ponctuelles,

$$\begin{cases} \hat{y} = f(x,y,\varepsilon) \\ \hat{x} = g(x,y,\varepsilon) \end{cases}$$

elle peut donc être étendue dans deux directions opposées. Les transformations non locales font intervenir des primitives dans le changement de variables et les transformations dynamiques font intervenir des dérivées.

On rappelle que $R(<N)$ symétries ponctuelles locales ne permettent généralement pas de réduire complètement une équation d'ordre, N, ou, ce qui revient au même, de trouver toutes ses intégrales premières.

La bonne nouvelle, c'est qu'on peut ajouter les symétries généralisées aux symétries ponctuelles afin de déterminer les intégrales premières par la méthode algébrique. Rien ne change dans la procédure, il suffit qu'on puisse écrire,

$$X_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{R} f_j X_j + gA \qquad i \in \{1,2,\cdots,R\}$$

où R désigne à présent le nombre de symétries ponctuelles et/ou dynamiques. Les f_i sont, à nouveau, constantes ou intégrales premières.

Exemple. Soit l'équation d'ordre, 4,

$$y_{xxxx} = \frac{y_{xxx} + y_{xxx}^2}{y_{xx}}$$

possédant quatre symétries ponctuelles (ici prolongées jusqu'à l'ordre 3) générées par,

$$\begin{aligned}
X_1 &= \partial_x \\
X_2 &= \partial_y \\
X_3 &= x\partial_y + \partial_{y_x} \\
X_4 &= x\partial_x + 3y\partial_y + 2y_x\partial_{y_x} + y_{xx}\partial_{y_{xx}} + 0\partial_{y_{xxx}}
\end{aligned}$$

Quatre symétries ne suffisent pas pour procéder à une recherche algébrique des intégrales premières. L'idée vient naturellement de se demander si d'autres symétries dynamiques ne pourraient pas compléter cet ensemble.

Rien qu'en se contentant de générateurs tels que ξ est nul et tels que η ne dépend pas de y_{xxx}, on trouve effectivement quatre nouvelles symétries (que nous prolongeons également jusqu'à l'ordre trois) :

$$X_5 = y_x\partial_y + y_{xx}\partial_{y_x} + y_{xxx}\partial_{y_{xx}} + \frac{y_{xxx}(1+y_{xxx})}{y_{xx}}\partial_{y_{xxx}}$$

$$X_6 = (y - \frac{1}{3}xy_x)\partial_y + \frac{1}{3}(2y_x - xy_{xx})\partial_{y_x} + \frac{1}{3}(y_{xx} - xy_{xxx})\partial_{y_{xx}} - \frac{1}{3}\frac{xy_{xxx}}{y_{xx}}(1+y_{xxx})\partial_{y_{xxx}}$$

$$X_7 = y_{xx}\partial_y + y_{xxx}\partial_{y_x} + \frac{y_{xxx}+y_{xxx}^2}{y_{xx}}\partial_{y_{xx}} + \frac{y_{xxx}}{y_{xx}^2}(1+y_{xxx})^2\partial_{y_{xxx}}$$

$$X_8 = (xy_{xx} - \frac{1}{2}x^2)\partial_y + (y_{xx} - x + xy_{xxx})\partial_{y_x} + (2y_{xxx} - 1 + x\frac{y_{xxx}+y_{xxx}^2}{y_{xx}})\partial_{y_{xx}} + (x + 3y_{xx} + xy_{xxx})\frac{y_{xxx}+y_{xxx}^2}{y_{xx}^2}\partial_{y_{xxx}}$$

On trouvera ces calculs laborieux à la section 7 du Notebook. Le calcul détaillé est un mélange d'automatisation et d'aide manuelle. Rien n'exclut que d'autres symétries existent, en particulier telles que ξ n'est pas nul mais il n'est pas nécessaire de les connaître car huit symétries suffisent amplement.

La méthode algébrique est à présent d'application puisque le nombre des symétries surpasse, N. On résout le système sous dimensionné, $W_{(N+1)\times(R+1)} \cdot \vec{f}_{R+1} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x & 3y & y - \frac{1}{3}xy_x & y_{xx} & xy_{xx} - \frac{1}{2}x^2 & y_x \\ 0 & 0 & 1 & 2y_x & \frac{2y_x - xy_{xx}}{3} & y_{xxx} & y_{xx} - x + xy_{xxx} & y_{xx} \\ 0 & 0 & 0 & y_{xx} & \frac{y_{xx} - xy_{xxx}}{3} & \frac{y_{xxx}+y_{xxx}^2}{y_{xx}} & 2y_{xxx} - 1 + x\frac{y_{xxx}+y_{xxx}^2}{y_{xx}} & y_{xxx} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{xy_{xxx}(1+y_{xxx})}{3y_{xx}} & \frac{y_{xxx}}{y_{xx}^2}(1+y_{xxx})^2 & (x+3y_{xx}+xy_{xxx})\frac{y_{xxx}+y_{xxx}^2}{y_{xx}^2} & \frac{y_{xxx}+y_{xxx}^2}{y_{xx}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ g \end{pmatrix} = 0$$

La symétrie X_5 est volontairement absente : on a en effet la relation évidente, $X_1 = A - X_5$, qui ne nous apprend rien d'intéressant si ce n'est que +1 et -1 sont des constantes ! En fait, toute colonne qui ne contribue pas au rang maximum de la matrice, W, peut être ignorée. On trouve trois intégrales premières algébriques,

$$I_1 = \frac{1+y_{xxx}}{y_{xx}}$$

$$I_2 = x + y_{xx} - I_1y_x$$

$$I_3 = (y - xy_x)I_1^2 - x - y_{xx} + \frac{1}{2}I_1x(x+2y_{xx})$$

La quatrième intégrale première n'est pas algébrique. On la trouve cependant en remarquant que l'on a :

$$\omega_{y_{xxx}} = \frac{1+2y_{xxx}}{y_{xx}} = I_1 + \frac{y_{xxx}}{y_{xx}} = D_x(I_1x + \ell n|y_{xx}|) \qquad \Rightarrow \qquad U = I_1x + \ell n|y_{xx}|$$

Le déterminant de la matrice W amputée des colonnes 5, 7 et 8 vaut

$$w = \frac{y_{xxx}(1+y_{xxx})^2}{y_{xx}} = I_1^2 y_{xx} y_{xxx}$$

d'où la quatrième intégrale première vaut, à une constante près :

$$I_4 = \ell n\left|I_1^2 y_{xx} y_{xxx}\right| - I_1 x - \ell n\left|y_{xx}\right| \qquad \Rightarrow \qquad I_4 = \ell n\left|y_{xxx}\right| - I_1 x$$

Les quatre intégrales premières permettent à présent de construire la solution générale sous forme explicite, il suffit d'éliminer les dérivées d'ordres un à trois :

$$y = c_1 + c_2 x + \frac{1}{2c_3} x^2 + c_4 e^{c_3 x}$$

Symétries du problème de Kepler.

Le problème de Kepler à centre fixe offre un bel exemple de système dont les symétries ponctuelles ne suffisent pas à caractériser la solution. Ses équations d'évolution se notent en coordonnées cartésiennes sous la forme d'un système de deux équations d'ordre deux :

$$\begin{cases} x_{tt} + \mu x/(x^2 + y^2)^{3/2} = 0 \\ y_{tt} + \mu y/(x^2 + y^2)^{3/2} = 0 \end{cases}$$

Tout générateur de symétrie, ponctuelle ou dynamique, se note (non encore prolongé) :

$$X = \xi(x,y,x_t,y_t)\partial_t + \eta_1(x,y,x_t,y_t)\partial_x + \eta_2(x,y,x_t,y_t)\partial_y$$

Ce système ne possède que deux symétries ponctuelles ce qui est insuffisant pour trouver toutes les intégrales premières ($R<N$). Elles sont engendrées par les générateurs suivants :

$$X_1^{(0)} = \partial_t + 0\partial_x + 0\partial_y \qquad X_2^{(0)} = 0\partial_t - y\partial_x + x\partial_y$$

Dans l'espace-temps, ces symétries traduisent l'invariance par translation du temps et par rotation autour de l'axe *Oz*.

Deux autres symétries dynamiques existent dont les générateurs (non encore prolongés pour plus de clarté) se notent :

$$X_3^{(0)} = 0\partial_t + yy_t\partial_x + (x_t y - 2xy_t)\partial_y \qquad X_4^{(0)} = 0\partial_t + (xy_t - 2x_t y)\partial_x + xx_t\partial_y$$

Même en se faisant aider par un logiciel de calcul formel, il faut un peu de patience pour déterminer ces symétries. Dans le Notebook (section 8), nous nous contentons de vérifier que ces quatre opérateurs satisfont les deux conditions de symétrie,

$$X_i^{(2)}[\,x_{tt} + \mu x/(x^2 + y^2)^{3/2}\,] = 0$$
$$X_i^{(2)}[\,y_{tt} + \mu y/(x^2 + y^2)^{3/2}\,] = 0$$

Les quatre générateurs, prolongés jusqu'à l'ordre un, permettent de trouver les intégrales premières du système de Kepler. On commence par vérifier (cfr Notebook) qu'il existe une combinaison linéaire à coefficients variables entre les opérateurs,

$$X_1^{(1)} = \partial_t$$
$$X_2^{(1)} = -y\partial_x + x\partial_y - y_t\partial_{x_t} + x_t\partial_{y_t} - y_{tt}\partial_{x_{tt}} + x_{tt}\partial_{y_{tt}}$$
$$X_3^{(1)} = yy_t\partial_x + (x_t y - 2xy_t)\partial_y + (y_t^2 - \mu\frac{y^2}{r^3})\partial_{x_t} + (\mu\frac{xy}{r^3} - x_t y_t)\partial_{y_t}$$
$$X_4^{(1)} = (xy_t - 2x_t y)\partial_x + xx_t\partial_y + (\mu\frac{xy}{r^3} - x_t y_t)\partial_{x_t} + (x_t^2 - \mu\frac{x^2}{r^3})\partial_{y_t}$$
$$A = \partial_t + x_t\partial_x + y_t\partial_y - \mu\frac{x}{r^3}\partial_{x_t} - \mu\frac{y}{r^3}\partial_{y_t}$$

où on a posé, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

puis on isole un des opérateurs, X_i, au choix, en fonction des autres. On a, par exemple :

$$X_1^{(1)} = 2\frac{W}{J}X_2^{(1)} - \frac{R_x}{J^2}X_3^{(1)} - \frac{R_y}{J^2}X_4^{(1)} + A$$

Les coefficients des générateurs présents dans le membre de droite sont constants ou intégrales premières :

$$J = xy_t - x_t y \qquad \text{(Moment angulaire)}$$
$$En = \frac{1}{2}(x_t^2 + y_t^2) - \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{(Energie)}$$
$$R_x = yx_t y_t + x(\frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}} - y_t^2)$$
$$R_y = xx_t y_t + y(\frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x_t^2)$$
(Vecteur de Lenz)

Toutes ces intégrales premières sont autonomes (*t* n'y figure pas explicitement). Le système de Kepler étant d'ordre 4, il ne peut exister que trois intégrales premières autonomes. Les quatre intégrales établies sont donc nécessairement dépendantes. On a, de fait, la relation,

$$R_x^2 + R_y^2 - \mu^2 = 2J^2W\,.$$

L'énergie est classiquement associée à la symétrie par translation temporelle et le moment angulaire à la symétrie de rotation dans le plan. On voit que le vecteur de Lenz, (R_x, R_y), est associé à deux symétries dynamiques non triviales.

Symétries des systèmes de Lorenz et de Hénon-Heiles.

Ces systèmes pouvant être chaotiques, il est inutile d'espérer que la théorie de Lie permette de réduire leurs équations à un ensemble de quadratures dans tous les cas. Un système génériquement insoluble l'est par quelque méthode que ce soit.

Il est, par contre, tout à fait possible de réduire ces systèmes, totalement ou partiellement, dans certains cas où les paramètres qui y interviennent possèdent des valeurs particulières. Ces systèmes cessent alors généralement d'être chaotiques.

Système de Lorenz.

Rappelons que le système de Lorenz,

$$\begin{cases} x_t = \sigma(y - x) \\ y_t = rx - y - xz \\ z_t = xy - \beta z \end{cases}$$

est équivalent à l'équation découplée autonome, d'ordre 3,

$$xx_{ttt} - [x_t - (\sigma + \beta + 1)x]x_{tt} - (\sigma + 1)x_t^2 + [x^3 + \beta(\sigma + 1)x]x_t + \sigma[x^4 + \beta(1 - r)x^2] = 0$$

On rappelle un argument dû à Poincaré qui précise qu'un système chaotique *autonome* est toujours d'ordre au moins égal à trois. Or l'équation étant autonome, elle possède une symétrie évidente, de générateur, ∂_t. Il suffit donc permuter les variables dépendante et indépendante pour réduire l'ordre d'une unité, faisant passer à l'ordre deux ($u = t_x$) :

$$x(-\frac{u_{xx}}{u^4} + 3\frac{u_x^2}{u^5}) + [\frac{1}{u} - (\sigma + \beta + 1)x]\frac{u_x}{u^3} - (\sigma + 1)\frac{1}{u^2} + [x^3 + \beta(\sigma + 1)x]\frac{1}{u} + \sigma[x^4 + \beta(1 - r)x^2] = 0$$

Cela ne signifie nullement que l'argument de Poincaré interdise subitement tout comportement chaotique au système de Lorenz : l'équation est bien d'ordre deux mais elle est devenue *non autonome*.

Pour certaines valeurs des paramètres, β, σ et r, il peut se faire que de nouvelles symétries ponctuelles ou dynamiques apparaissent livrant quelques intégrales premières et prévenant éventuellement un comportement chaotique. On notera que dans certains exemples qui suivent, on a étendu la notion de symétrie aux générateurs linéaires en la dérivée seconde, x_{tt}. Etant dans le cas, $R<N$, seule la méthode du facteur intégrant est applicable. On trouvera à la section 9 du Notebook le détail des calculs dans le cas, $\beta = 0 \;\; \& \;\; \sigma = 1/3$.

1) $\beta = 0 \;\; \& \;\; \sigma = 1/3 \;\; \Rightarrow \;\; \begin{cases} X_1 = \partial_t \\ X_2 = e^{4t/3}x_t[xx_{tt} - x_t^2 + \frac{1}{4}x^4]\partial_x \end{cases}$

$$\Lambda = xe^{4t/3} \qquad \Rightarrow \qquad I = e^{4t/3}(x^4 - 4x_t^2 + 4xx_{tt})$$

intégrale première que l'on peut réécrire en terme des variables, x, y, z :

$$I = e^{4t/3}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{r-z}{3}x^2 - \frac{1}{9}y(2x+y)\right)$$

D'autres cas de solubilité partielle sont mentionnés dans la littérature :

2) $\beta = 1 \;\;\&\;\; \sigma = \frac{1}{2} \;\;\&\;\; r = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \begin{cases} X_1 = \partial_t \\ X_2 = e^{t/2}(2\partial_t - x\partial_x) \\ X_3 = e^{3t/2}[(2\frac{x_t}{x}+1)x_{tt} + 3\frac{x_t^2}{x} + \frac{2x^2+5}{2}x_t + \frac{x^3+x}{2}]\partial_x \\ X_4 = e^{5t/2}[(2xx_t + x^2)x_{tt} - 2x_t^3 + \frac{x^4+2x^2}{2}x_t + \frac{x^3+x^5}{4}]\partial_x \end{cases}$

qui livre : $\begin{cases} I_1 = e^t\left(x^2 - z\right) \\ I_2 = e^{2t}\left(y^2+z^2\right) \end{cases} \;\;\Rightarrow\;\; J = \frac{\left(x^2-z\right)^2}{y^2+z^2}$

3) $\beta = 6\sigma - 2 \;\;\&\;\; r = 2\sigma - 1 \;\;\Rightarrow\;\; \begin{cases} X_1 = \partial_t \\ X_2 = e^{4\sigma t}x_t[xx_{tt} - x_t^2 + \frac{1}{4}x^4 + (3\sigma-1)(xx_t + (1-\sigma)x^2)]\partial_x \end{cases}$

qui livre : $I = e^{4\sigma t}\left(\frac{x^4}{4} - \sigma^2y^2 - xy + (2\sigma-1)^2(xy - x^2) + \sigma x(2y - xz)\right)$

4) $\beta = 4 \;\;\&\;\; \sigma = 1 \;\;\Rightarrow\;\; \begin{cases} X_1 = \partial_t \\ X_2 = e^{4t}x_t[xx_{tt} + (1-r)\frac{4x_{tt}+8x_t}{x} - (x_t - x)^2 + \frac{x^4}{4} + (3-2r)x^2 + 4(1-r)^2]\partial_x \end{cases}$

qui livre : $I = e^{4t}\left(\frac{x^4}{4} - x^2(r+z) + y(2x-y) - 4(1-r)z\right)$

5) $\beta = 2\sigma \;\;\Rightarrow\;\; \begin{cases} X_1 = \partial_t \\ X_2 = e^{2\sigma t}x_t[\frac{x_{tt}}{x} + (\sigma+1)\frac{x_t}{x} + \frac{1}{2}x^2 + \sigma(1-r)]\partial_x \end{cases}$

qui livre : $I = e^{2\sigma t}\left(\frac{x^2}{2} - \sigma z\right)$

Mentionnons encore deux cas que nous ne détaillons pas davantage :

$$\beta = 1 \;\;\&\;\; r = 0 \;\;\Rightarrow\;\; I = e^{2t}\left(y^2 + z^2\right)$$

$$\beta = 1 \;\;\&\;\; \sigma = 1 \;\;\Rightarrow\;\; I = e^{2t}\left(-rx^2 + y^2 + z^2\right)$$

On ne connaît actuellement aucun autre cas de solubilité partielle et on pense qu'il n'y en a pas. Dans ce problème, la méthode de Lie s'avère supérieure à celle de Painlevé exposée par ailleurs : elle détecte davantage de cas solubles.

Système de Hénon-Heiles.

Dans ce problème, la méthode de Lie retrouve ni plus ni moins les résultats liés au test de Painlevé, exposé par ailleurs. Ce système étant hamiltonien il est naturel de s'en tenir aux équations du second ordre comme on l'a déjà fait pour le problème de Kepler :

$$\begin{cases} x_{tt} + Ax + 2Dxy = 0 \\ y_{tt} + By + Dx^2 - Cy^2 = 0 \end{cases}$$

Les trois cas où une deuxième intégrale première existe, en plus de l'énergie, sont exactement ceux pour lesquels on a pu dégager une symétrie dynamique. Nous nous contentons de les citer mais le lecteur dispose, à présent, de tous les outils nécessaires.

1) $C + D = 0 \quad \& \quad A = B \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} X_1 = \partial_t \\ X_2 = y_t \partial_x + x_t \partial_y \end{cases}$

qui livre : $I_2 = x_t y_t + Bxy + Dxy^2 + \frac{1}{3} Dx^3$

2) $C + 6D = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} X_1 = \partial_t \\ X_2 = [(\frac{4A - B}{2D} - 2y)x_t + xy_t]\partial_x + xy_t \partial_y \end{cases}$

qui livre : $I_2 = \frac{A(B - 4A)}{4D} x^2 - \frac{D}{4} x^4 - Dx^2 y^2 + \frac{B - 4A}{4D} x_t^2 + yx_t^2 - Ax^2 y - xx_t y_t$

tandis que la suivante passe le test faible et possède une symétrie dynamique,

3) $C + 16D = 0 \quad \& \quad 16A = B \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X_1 = \partial_t \\ X_2 = [(Ax^2 + 2Dx^2 y)x_t + x_t^3 - \frac{D}{3} x^3 y_t]\partial_x - \frac{D}{3} x^3 x_t \partial_y \end{cases}$

qui livre : $I_2 = 9(x_t^2 + Ax^2)^2 + 12Dx_t x^2 (3yx_t - xy_t) - 2D^2 x^4 (x^2 + 6y^2) - 12ADx^4 y$

Conclusion.

La théorie de Lie est assurément l'une des plus belles qui soient en analyse mathématique. Elle unifie la présentation de procédés d'intégration disparates au moyen d'un principe de symétrie directeur.

Insistons sur ce fait qu'elle est évidemment incapable d'intégrer une équation génériquement insoluble. L'absence de symétrie est un indice de non solubilité d'une équation différentielle mais elle ne la prouve pas car rien n'exclut qu'une généralisation non envisagée ne fonctionnerait pas. Autrement dit, aussi puissante qu'elle puisse paraître, la méthode de Lie ne peut en aucun cas être considérée comme une procédure de décision de la chaoticité des systèmes différentiels. Une telle procédure n'existe d'ailleurs probablement pas.