La thermodynamique du calcul.

Variations sur un thème de Landauer.

Richard Feynman

Rolf Landauer

Charles Bennett

Définition de l'entropie.

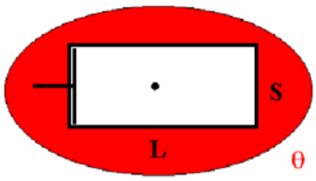
Rappelons que pour un observateur informé de la description d'un système à la tolérance, δ, l'entropie physique est une fonction d'état assimilable à l'entropie (encore appelée complexité) algorithmique de cette description :

$$S = S_{algo} = K + c_{\delta} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta S = \Delta S_{algo} = \Delta K$$

La thermodynamique buissonnière utilise cette définition dans le cadre de quelques expériences par la pensée qui mettent en scène le gaz de Szilard. Il s'agit d'un gaz fictif qui bien que réduit à sa plus simple expression, une seule molécule, présente toutes les caractéristiques du gaz parfait.

Le gaz de Szilard, à température constante, se présente comme une molécule unique prisonnière d'une enceinte aux parois éventuellement irrégulières, plongée dans un thermostat, θ, de température T. L'équation d'état de ce gaz coïncide avec l'équation du gaz parfait,

$$pS\ell = pV = kT \,.$$



$$\underbrace{b_n \cdots b_1 b_0}_{\ell g(L)} . \underbrace{b_{-1} b_{-2} \cdots b_{-m}}_{\ell g(1/\delta)}$$

L'entropie de ce gaz se calcule sur base de sa description à la tolérance, δ. La position et la vitesse de la molécule suffisent à cet effet mais le fait que le thermostat maintienne la température constante a pour conséquence que la vitesse ne varie pas lors des chocs avec les parois. Comme seules les variations d'entropie nous intéressent, autant laisser tomber l'encodage de la vitesse. Ne reste donc que celui de la position : nous nous contenterons de l'abscisse qui exige ℓgL chiffres binaires avant la virgule et $\ell g(1/\delta)$ après la virgule. Au total, et quelles que soient les unités de longueurs utilisées, l'encodage de la position requiert :

$$S = S_{algo} = \ell g(L/\delta) \quad (bits) \,.$$

Il en résulte que toute variation de volume du gaz entraîne une variation d'entropie indépendante de la tolérance adoptée :

$$\Delta S = \Delta \ell g(L) = \ell g \frac{L_f}{L_i} = \ell g \frac{V_f}{V_i} \quad (bits) \,.$$

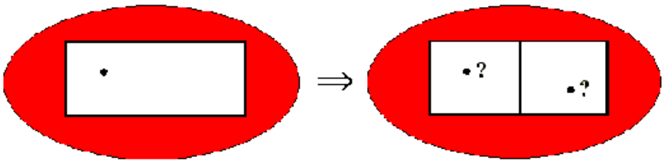
Si l'on compare cette formule avec celle démontrée dans le cadre de la thermodynamique classique, pour le même gaz parfait,

$$\Delta S = kT \ell n(V_f / V_i) \quad (J/K)$$

on trouve l'équivalence suivante entre les unités d'entropies physique et algorithmique :

$1 \quad bit = k\ell n2 \quad (J/K)$.

La définition algorithmique de l'entropie fait intervenir d'emblée une première subtilité : supposons que l'observateur décide d'insérer une cloison au milieu de l'enceinte. La molécule est certainement piégée dans un compartiment bien défini mais le fait est que l'observateur primitif ignore duquel il s'agit : pour lui l'entropie du gaz n'a pas varié.



Un autre observateur, mieux informé, aurait pu le savoir mais le fait demeure qu'il s'agit d'un autre observateur et que lorsqu'on calcule une variation d'entropie on doit s'en tenir à un observateur unique.

Les deux principes de la physique.

C'est intentionnellement que nous parlons des deux principes de la physique et non de la thermodynamique comme il est d'usage de le faire. Le premier principe ne pose aucun problème particulier, il énonce simplement que :

Premier principe :
« L'énergie interne d'un système isolé se conserve ».

Aucune exception n'est connue à ce principe qui dit simplement que tout système isolé possède au moins un invariant, son énergie interne, que celle-ci soit de nature mécanique électrique, nucléaire ou thermique ou toutes à la fois. En thermodynamique, il exprime que le moteur sans carburant n'existe pas.

On a découvert qu'il existait une deuxième limitation à la construction d'un moteur : le moteur monotherme, c'est-à-dire celui qui s'approvisionnerait à une seule source de chaleur, n'existe pas non plus.

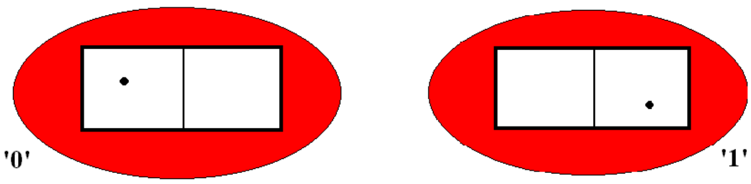
Deuxième principe (énoncé attribué à Kelvin) :
« Il est impossible, en utilisant un système revenant régulièrement dans son état initial ($\Delta U=0=Q+W$), d'effectuer un travail ($W<0$) dans le reste de l'univers en extrayant de la chaleur à un seul thermostat. On a donc obligatoirement : $W \geq 0$ »
« Si on exige en sus qu'il ne subsiste pas de modification extérieure, (= transformation réversible), alors seulement, $W=0$ »

Nous postulons ces énoncés sans discussion puisqu'un postulat n'a pas à être justifié et nous en tirerons quelques conséquences dans le cadre de la thermodynamique du calcul.

Historiquement, le deuxième principe ainsi que la fonction d'état qui lui est associée, l'entropie, ont été introduits dans le cadre de la thermodynamique et ni l'une ni l'autre ne sont jamais sortis de ce cadre particulier. C'est une conséquence de la définition statistique de l'entropie, due à Boltzmann, qui, de fait, ne s'applique qu'aux systèmes désordonnés. Il est tout à fait étrange qu'un principe que tout le monde s'accorde à trouver fondamental reste confiné dans un coin particulier de la physique. La définition algorithmique de l'entropie et la théorie de l'information fournissent précisément le cadre de la généralisation attendue qui restitue le deuxième principe à la physique tout entière.

Encodage d'un bit par le gaz de Szilard.

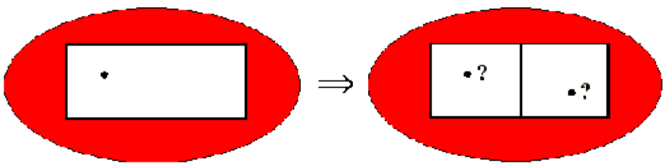
Le gaz de Szilard autorise l'encodage d'un bit, il suffit de le cloisonner en son milieu : une molécule piégée à gauche code le bit '0' et à droite le code à '1'. Lorsqu'on ignore dans quel compartiment la molécule se trouve, on dit que le gaz est dans l'état neutre 'N'. Ce type d'encodage présente la particularité de ne faire aucune différence énergétique entre les deux états, ce qui rend l'opération de négation (Not'0'='1' et Not'1'='0') sans dépense d'énergie particulièrement simple : il suffit de retourner lentement la boîte.



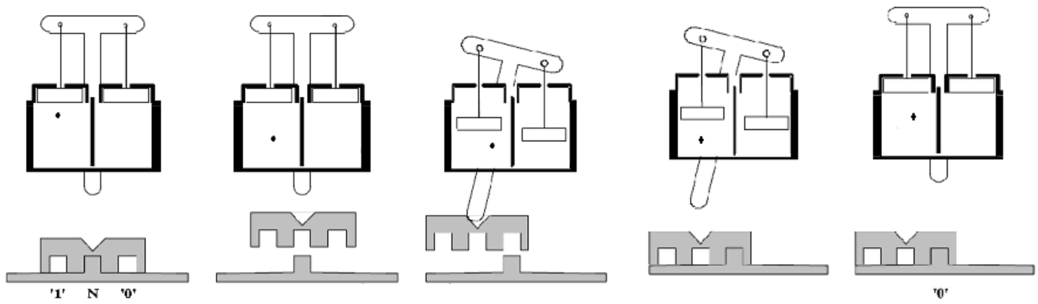
Passons en revue quelques opérations élémentaires que l'on doit pouvoir effectuer sur le bit, écriture, lecture et effacement, et voyons si ces opérations sont possibles réversiblement. Rappelons qu'une transformation est réversible si, à son terme, il est possible de ramener non seulement le système mais aussi le reste de l'univers dans l'état initial.

Lecture (= mesure) réversible d'un bit inconnu.

Un bit encodé doit pouvoir être lu. La lecture d'un bit inconnu implique qu'on soit capable de localiser une molécule qui aurait été piégée dans un des compartiments par insertion d'une cloison.



Il importe de comprendre que ce que nous voulons c'est une procédure entièrement robotisée qui n'implique aucune intervention intelligente, en quelque sorte l'équivalent d'une procédure algorithmique effective. C’est Bennett qui a fourni le premier exemple d’un mécanisme de ce genre entièrement réversible.

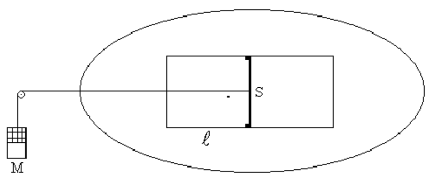


Le premier diagramme représente la particule piégée dans un compartiment inconnu après insertion de la cloison médiane. Deux pistons latéraux reliés aux bras d’une balance à fléau sont initialement en position bloquée. Une clef de mesure est initialement verrouillée dans la position neutre ‘N’. Le protocole de mesure est le suivant : la clef est soulevée réversiblement (par exemple en détendant progressivement un ressort initialement comprimé) et le fléau est abaissé de la même façon jusqu’à ce que le fléau soit engagé dans l’encoche de la clef. La molécule exerce une pression sur un seul plateau ce qui déséquilibre la balance et fait progresser horizontalement la clef dans l’un ou l’autre sens. Au terme de sa course, la clef est rabaissée et le fléau est relevé. La position finale de la clef indique quel compartiment est occupé donc la valeur du bit encodé. Il est possible d’effectuer toutes ces manœuvres infiniment lentement en sorte que l’opération inverse réintègre tout l’univers dans son état initial : la mesure est alors réversible.

Le bilan entropique est le suivant : l’observateur a glané une information qui réduit d’un bit la description, donc l’entropie, du gaz mais la mémoire de l’appareil de mesure (la clef) stocke un bit en encodant le résultat de la mesure. Au bilan, on a :

$$\Delta S_{gaz} = -1 \ \ bit \qquad \Delta S_{robot} = +1 \ \ bit \qquad \Rightarrow \qquad \Delta S_{univ} = 0$$

On aurait pu proposer un protocole plus simple pour la mesure mais il n’aurait pas fait apparaître avec autant de clarté le basculement de la clef et l’encodage binaire qu’il implique. Il suffisait de remplacer la cloison séparatrice par un piston semi-mobile maintenu en équilibre par un contrepoids et deux butées positionnées comme sur la figure. La masse, M, est ajustée pour garantir la condition d’équilibre, $pS=Mg$:



$pS=Mg$

Si on enlève un petit fragment de masse, δM, au contrepoids, deux cas sont possibles : soit celui-ci ne réagit pas et on peut en conclure que la molécule se trouve à droite, soit la molécule est à gauche et il réagit par une légère ascension d'amplitude,

$$\delta\ell = \ell\frac{\delta M}{M-\delta M},$$

accompagnée d’une perte de chaleur du thermostat,

$$Q=-(M-\delta M)g\delta\ell=-(\delta M)g\ell$$

Dans les deux cas, il suffit de recharger un fragment identique à celui qui a été prélevé pour revenir à l'état initial. Remarquons, toutefois, une différence essentielle selon que la molécule se révèle être à droite ou à gauche : si elle est à droite, rien n'a bougé et il suffit de replacer le fragment précédemment ôté. Mais si elle est à gauche, il convient de replacer un fragment prélevé à la hauteur, $\delta\ell$. Le robot qui effectue cette manœuvre doit donc, à nouveau, archiver un bit de mesure pour être en mesure de placer son bras à l'altitude correcte et recharger le fragment manquant.

Au terme de cette détection, on se trouve en présence de deux compartiments, de volume, V/2, dont l'un est vide et l'autre contient l'unique molécule. L'entropie du gaz a diminué d'un bit mais celle de l'univers n'a pas diminué pour autant car un bit d'entropie est apparu dans la mémoire du robot, suite à l'archivage de la mesure effectuée. Le bilan entropique s'écrit à nouveau sous la forme :

$$\Delta S_{gaz} = -1bit \qquad \Delta S_{robot} = +1bit \qquad \Delta S_{univ} = 0 \cdot$$

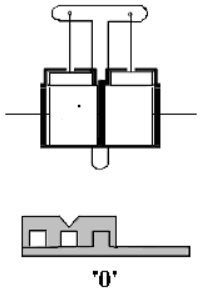
Mentionnons encore que, dans ce montage, le retour à l'état initial n'est rigoureusement exact qu'à la limite, $\delta M \to 0$. En effet, le bilan complet de l'opération a pour conséquence qu'un fragment, δM, a perdu une énergie potentielle, $(\delta M)g(\delta\ell)$, qui s'est dissipée, sans espoir de retour, dans le thermostat. Cette énergie a pour valeur,

$$\Delta E = g\ell \frac{(\delta M)^2}{M - \delta M},$$

un infiniment petit du second ordre, négligeable à la limite, $\delta M \to 0$.

Le principe de Landauer ou le coût entropique de l'effacement.

A ce stade élémentaire, on pourrait penser que l'expérience par la pensée suivante met d'emblée l'énoncé de Kelvin en difficulté. Considérons un gaz de Szilard au milieu duquel nous insérons une cloison qui emprisonne la molécule dans un compartiment inconnu. Deux pistons sont prévus à chaque extrémité, prêts à être enfoncés horizontalement. Nous savons comment détecter réversiblement la molécule et que l'enregistrement de cette mesure mobilise un bit au niveau de la mémoire de l'appareil de mesure. Nous pouvons à présent utiliser ce bit pour prendre la décision binaire suivante : si le bit est '0' (resp. '1'), on enfonce sans rencontrer de résistance le piston de droite (resp. de gauche), on enlève la cloison médiane puis on extrait réversiblement le travail $W = -kT\ell n2 \ (J)$ au détriment du thermostat. Le gaz étant revenu dans son état initial, rien n'empêche de recommencer la manœuvre autant de fois que l'on veut et au terme de N manœuvres de ce genre on aurait extrait $NkT\ell n2 \ (J)$ au contact d'une seule source. Le principe de Kelvin serait-il pris en défaut ?



Il le serait si l'univers tout entier était réellement revenu dans son état initial mais ce n'est pas le cas car la mémoire de l'appareil de mesure n'y est pas revenue : elle a, au contraire, été progressivement polluée par une suite de N bits qu'il faut effacer.

Si l'on tient à l'énoncé du second principe, une seule conclusion s'impose : l'effacement d'une suite de N bits, au contact d'un thermostat, y dissipe au minimum, $NkT\ell n2 \quad (J)$, ce qui annule le travail extrait dans un premier temps. C'est le principe de Landauer.

Le principe de Landauer :
Tout bit effacé au contact d'un thermostat, de température T, y dissipe en chaleur un travail au moins égal à $kT\ell n2 \quad (J)$.

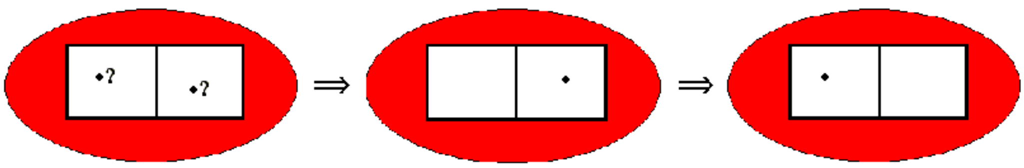
Nous avons conservé l'appellation largement répandue de « principe » mais il est clair que c'est un abus de langage dont les physiciens sont malheureusement coutumiers : le « principe » de Landauer se déduit logiquement du second principe d'où l'appellation « théorème » serait plus convenable. La répugnance des physiciens pour cette distinction provient de l'inexistence d'un cadre axiomatique sérieux propre à la physique.

Malgré une dérivation simple qui le rapproche de l'évidence, le principe de Landauer révèle quelques subtilités dans son interprétation. Ainsi le processus de mesure imaginé par Bennett livre une clef dans un état qui est évidemment parfaitement corrélé avec la position de la molécule. On pourrait penser que l'effacement pourrait se faire simplement en « regardant » où la clef s'est logée et en la délogeant pour la remettre dans l'état neutre, N. Mais pour être valable, le scénario ne peut en aucune manière faire intervenir un être intelligent : cela doit rester un robot. Si l'opération consiste à invoquer un deuxième robot qui efface le contenu de la mémoire du premier on n'a en rien résolu le problème posé : tout ce qu'on a réussi à faire c'est déplacer le problème en transportant l'entropie de la mémoire du premier sur celle du second. Et si on se contente du robot d'origine, on s'aperçoit immédiatement que la seule perspective qui s'offre à lui d'effacer le contenu de sa mémoire c'est d'inverser la manœuvre complète (mesure + extraction) et, par conséquent, de dissiper $Q = +kT\ell n2 \quad (J)$ dans le thermostat.

Ecriture réversible d'un bit.

L'écriture réversible d'un bit peut se concevoir de deux manières au moins. Une première manière d'écrire un bit imposé à '0' consiste à insérer une cloison au milieu de la boîte, puis de localiser la molécule par le procédé étudié et enfin de retourner la boîte ssi on détecte la molécule à droite. Le bilan entropique serait alors le suivant :

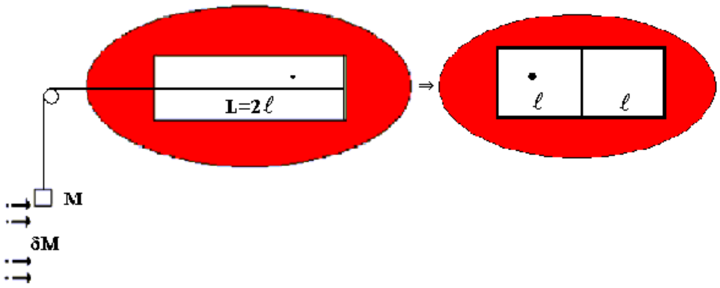
$\Delta S_{gaz} = -1 \quad bit \qquad \Delta S_{robot} = +1 \quad bit \qquad \Rightarrow \qquad \Delta S_{univ} = 0$



La diminution de l'entropie du gaz est parfaitement claire puisque l'encodage de la position nécessite un bit de moins. Le bit d'entropie apparu au niveau de la mémoire du robot est la conséquence de l'archivage de la mesure, archivage qui est nécessaire pour que le robot soit en mesure de décider de l'opportunité de la manœuvre du retournement de la boîte.

Une autre procédure d'écriture consiste à comprimer lentement et isothermiquement le gaz de Szilard par la droite pour confiner la molécule dans le compartiment de gauche, ce qui a pour effet de forcer le bit à la valeur '0'. Si l'on veut écrire le bit, '1', il suffit de retourner lentement la boîte au terme de la manœuvre précédente ou, si l'on préfère, de comprimer le gaz par la gauche.

La compression se fait de façon réversible en surchargeant progressivement le contre-poids de masse, M, qui maintient le piston en équilibre par un grand nombre, N=M/δM, de masses, δM, arbitrairement petites. Il est bien connu que l'opération inverse, à savoir enlever les surcharges une à une, aura pour effet de réintégrer l'univers dans son état de départ à l'exception d'une seule masse, δM, qui ne remontera pas à sa hauteur d'origine, une altération résiduelle négligeable à la limite δM→0.



$pS = kT / L = Mg$

Le travail exigé par la compression réversible du gaz vaut :

$$W = -\int_{V}^{V/2} pdV = kT\ell n2 \quad (J),$$

une énergie qui est immédiatement transférée au thermostat. Le bilan entropique serait alors le suivant :

$$\Delta S_{gaz} = -1 \;\; bit \qquad \Delta S_{\theta} = +k\ell n2 \;\; (J/K) \qquad \Rightarrow \qquad \Delta S_{univ} = 0$$

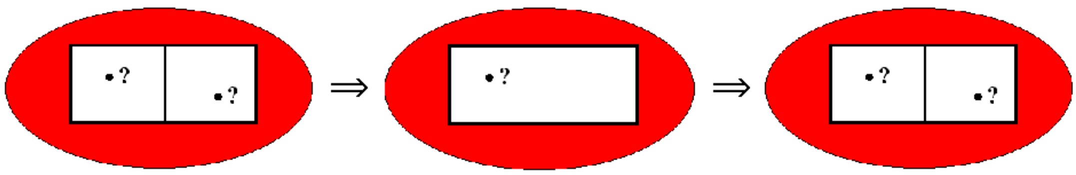
La même compression isotherme effectuée en surchargeant brutalement la masse, M, par une masse identique eût été irréversible. La masse totale, 2M, aurait chuté d'une altitude, ℓ, pour un travail effectué valant 2kT (J). Cette fois, le bilan entropique eût été différent :

$$\Delta S_{gaz} = -1 \;\; bit \qquad \Delta S_{\theta} = +2k \;\; (J/K) \qquad \Rightarrow \qquad \Delta S_{univ} = 1.885 \;\; bits > 0$$

Effacement d'un bit.

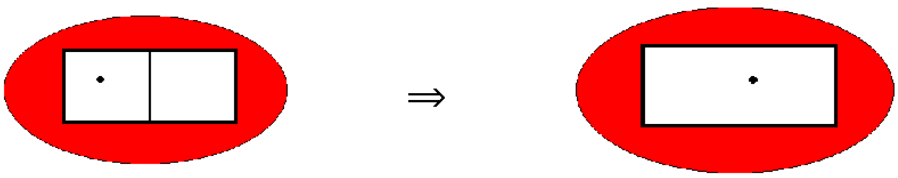
L'effacement d'un bit n'a pas les mêmes conséquences entropiques selon que ce bit est connu ou inconnu. Cette subtilité s'avère essentielle pour la suite de l'exposé.

L'effacement d'un bit inconnu est une opération trivialement réversible. En effet, lorsqu'on ignore où la particule se trouve dans la boîte de Szilard, on peut ôter la cloison puis la replacer autant de fois que l'on veut sans altérer l'entropie totale de l'univers $\Delta S_{univ} = 0$. En effet, que la cloison soit en place ou enlevée, il faut toujours autant de bits pour encoder la position de la molécule. Dit simplement, on ne peut pas oublier ce qu'on ne sait pas !



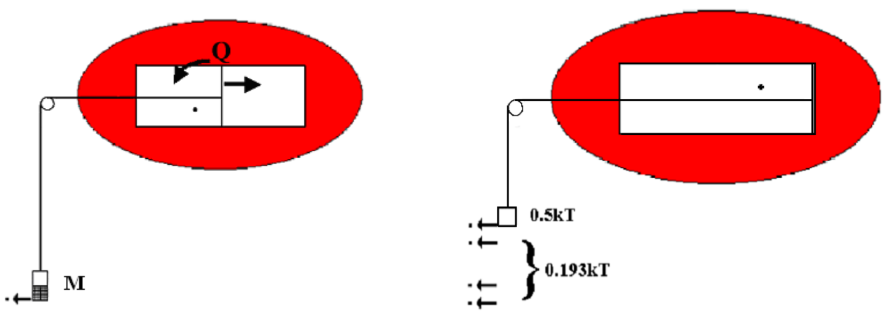
Les choses sont très différentes lorsque le bit à effacer est connu. Effacer un bit connu est particulièrement simple : il suffit d'ôter la cloison de séparation. C'est l'irrégularité des parois qui induit une trajectoire chaotique de la molécule et fait croître l'entropie de l'univers :

$$\Delta S_{univ} = \Delta S_{gaz} = \ell g \frac{V_f}{V_i} = \ell g 2 = +1 \ \ bit$$



La molécule a complètement oublié dans quel compartiment elle se trouvait et, quelle que soit la manière dont on s'y prend, il n'est plus possible de l'y replacer sans altérer le reste de l'univers.

On pourrait être tenté de croire qu'on rendrait la manœuvre d'effacement réversible en procédant à l'inverse de l'écriture : on ôterait par fragments, δM, la moitié de la masse M du contrepoids pour que le piston recule à fond de course, égarant par là-même la molécule.



C'est le thermostat qui fournirait le travail nécessaire pour un bilan entropique qui s'établirait comme suit :

$$\Delta S_{gaz} = +1 \ \ bit \qquad \Delta S_{\theta} = -k\ell n2 \ \ (J/K) \qquad \Rightarrow \qquad \Delta S_{univ} = 0$$

Toutefois ce raisonnement ne peut être qu'un leurre puisque, par définition, l'effacement d'un bit connu ne peut en aucun cas être réversible. D'ailleurs, il suffirait de procéder en sens inverse pour restaurer à tous les coups le bit dans son état d'origine : ce serait tout sauf un effacement. C'est, au fond, la conséquence du fait que le gaz est resté parfaitement corrélé à la mesure faite antérieurement. L'effacement véritable implique une décorrélation totale du système avec l'environnement. Dit autrement, on n'efface pas une cannette de bière en la jetant telle quelle à la poubelle mais en la recyclant.

Les subtilités de l'énoncé du second principe.

Si l'énoncé du premier principe ne varie pas d'un iota dans quelque traité de physique que ce soit, il n'en va pas de même du second. On trouvera dans la littérature plusieurs énoncés dont nous montrons qu'il ne sont pas rigoureusement équivalents, d'où la nécessité de mettre un peu d'ordre. Deux variantes populaires sont les suivantes :

« L'entropie d'un système isolé ne diminue jamais ».

Nous avons déjà vu que le théorème de retour de Poincaré fait, stricto sensu, un sort à cette version en la rendant exceptionnellement caduque. Si elle reste populaire, c'est évidemment parce que les exceptions sont rarissimes et éphémères en sorte qu'on pourrait dire que « l'entropie d'un système isolé ne diminue effectivement presque jamais ».

Une autre variante très répandue est la suivante :

« Un processus dont le seul résultat consiste à prendre de la chaleur à un thermostat et à la convertir intégralement en travail est impossible ».

Il est facile de se convaincre que cette variante ne peut pas non plus être tenue pour rigoureusement vraie. On considère, à cet effet, un gaz de Szilard au contact d'un thermostat. Lorsqu'on insère une cloison au milieu de l'enceinte, la molécule se retrouve fatalement piégée dans un compartiment. Avec 50% de chance il est alors possible d'extraire un travail à l'aide d'un piston systématiquement raccordé à un contrepoids orienté à gauche. L'objection pratique que le travail extrait serait ridiculement petit, dans le cas d'un gaz réel, ne change rien à l'évidence de principe qu'un travail a été extrait à l'aide d'un système décrivant une transformation fermée. Or c'est bien de la validité d'un principe que nous discutons ici.

Ce que le second principe interdit, en fait, c'est de réitérer la manœuvre d'extraction du travail à intervalles de temps réguliers. En effet, pour y parvenir, le robot qui commande toute l'opération doit impérativement savoir si l'extraction précédente a été couronnée de succès :

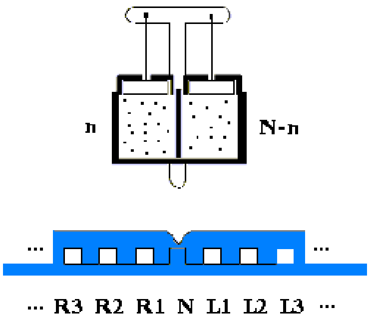
- dans l'affirmative, le robot doit déplacer son bras à l'extrémité droite de la chambre de Szilard pour ôter la cloison et la repositionner au milieu,

- dans la négative, il doit simplement ôter la cloison qui est restée en position médiane et l'y replacer un court instant plus tard.

Cette prise de décision binaire exige l'archivage en mémoire d'un bit qu'il faut effacer pour se replacer dans les conditions d'application du second principe.

Ce que dit réellement le second principe.

Reconsidérons l'enceinte de Szilard plongée dans un thermostat et introduisons-y N molécules. Lorsqu'on insère une cloison au milieu de l'enceinte, posons que n molécules ont été piégées à gauche et (N-n) à droite. Sauf le cas exceptionnel, N=2n, le déséquilibre sera la règle et le procédé de mesure de Bennett permet d'en connaître le sens (N>2n ou N<2n). En réalité, il permet de faire beaucoup mieux en affichant le partage exact, (n, N-n) sous la forme de la différence, 2n-N. On peut, en effet, régler le fléau de la balance pour que la différence de pression déplace la clef proportionnellement à cette valeur.



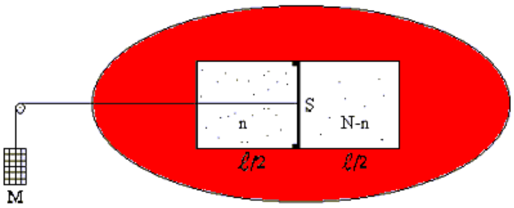
Dans le cas général où N≥1 molécules sont présentes dans l'enceinte, la clef de mesure possède N+1 états, codables chacun par un symbole prélevé dans un alphabet qui en comporte également N+1. Sauf dans le cas N=1, ces symboles ne sont pas équiprobables mais ils respectent la loi binomiale symétrique :

$$p_{n,N-n} = \frac{C_N^n}{2^N} \qquad (n = 0, \cdots, N).$$

Extraire occasionnellement un travail est facile, il suffit de respecter le protocole suivant. On commence par retourner la boîte si et seulement si la clef révèle un excès de molécules dans le compartiment de droite (états notés 'R'). Ensuite, on remplacer la cloison médiane par un piston maintenu en place par deux butées et un contrepoids orientés à gauche. Le contrepoids est calculé de telle manière que l'équilibre est garanti même si toutes les molécules sont, par le plus grand des hasards, emprisonnées dans le même compartiment de gauche, soit égal à :

$$Mg = NpS ,$$

où p représente la contribution de chaque molécule à la pression dans les compartiments initiaux (rappelons que les vitesses des molécules sont toutes égales). Evidemment n molécules y exercent une pression n fois plus forte.



Si l'on ôte le contrepoids par fragments successifs, disons de masse δM, il arrivera un moment où, lorsqu'on aura ôté $\frac{2N-2n}{N}\frac{M}{\delta M}$ fragments, le contrepoids ne pèsera plus que, (2n-N)pS, juste ce qu'il faut pour maintenir l'équilibre du piston. Si on continue à ôter des fragments, δM, un travail est progressivement extrait du thermostat. L'extraction s'arrête lorsqu'on a épuisé la totalité du contrepoids. Le piston aura alors reculé d'une distance totale, Δx , donnée par la relation,

$$\Delta x = \frac{\ell}{2}\left(\frac{2n}{N} - 1\right).$$

Le travail extractible se calcule aisément sur cette base en passant à la limite δM→0. On trouve que le compartiment de gauche apporte, en se dilatant, un travail utile que le compartiment de droite ne rabote que partiellement en se contractant, dans le détail :

$$W_{dilatation} = -\int_{\ell/2}^{\ell/2+\Delta x} np_1 S\frac{\ell}{2}\frac{dx}{x} = -nkT\ell n\frac{2n}{N} < 0 \text{ et,}$$

$$W_{contraction} = -\int_{\ell/2}^{\ell/2-\Delta x}(N-n)p_1 S\frac{\ell}{2}\frac{dx}{x} = -(N-n)kT\ell n(2-\frac{2n}{N}) > 0,$$

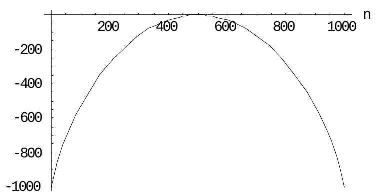
soit, au total,

$$W_{brut} = -kT\ell n(2)\left[n\ell g\frac{2n}{N} + (N-n)\ell g\left(2-\frac{2n}{N}\right)\right] \text{ (Joules).}$$

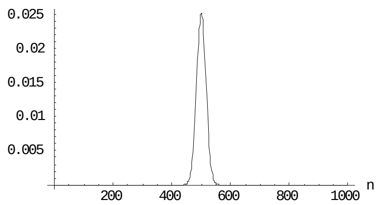
Pour les premières valeurs de N, voici ce que cela donne dans l'unité, $kT\ell n2\ \ (J)$, selon les valeurs de n (= 0, 1, 2, …, N) :

N=1 {-1, -1},
N=2 {-2, 0, -2},
N=3 {-3, -0.169899, -0.169899, -3},
N=4 {-4, -0.523248, 0, -0.523248, -4},
N=5 {-5, -0.963724, -0.100678, -0.100678, -0.963724, -5}

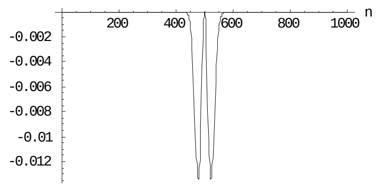
Sauf le cas rare, N=2n, un travail brut utile (donc négatif) est toujours extrait mais il faut beaucoup de chance pour qu'il soit important. Voici, en exemple, le cas, N=1000 :



W_{brut} $(unité : kT\ell n2)$



$p_{n,N-n} = \dfrac{C_N^n}{2^N}$



$p_{n,N-n} W_{brut}$

L'espérance moyenne de gain du travail brut se calcule aisément :

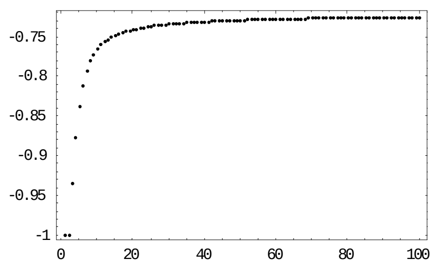
$$\langle W_{brut} \rangle = -kT\ell n(2) \sum_{n=0}^{N} \frac{C_N^n}{2^N} \left(n\ell g(\frac{2n}{N}) + (N-n)\ell g(2-\frac{2n}{N}) \right) \ (J)$$

Pour un petit nombre, N=1,2,3,4,5 de molécules dans l'enceinte, cette espérance vaut :

{-1, -1, -0.933834, -0.877444, -0.837767} $kT\ell n2 \quad (J)$.

Aux grandes valeurs de N on a le comportement asymptotique suivant :

$$\langle W_{brut} \rangle \approx -kT \left(0.5 + \frac{1}{4N} + O(1/N^2) \right)$$

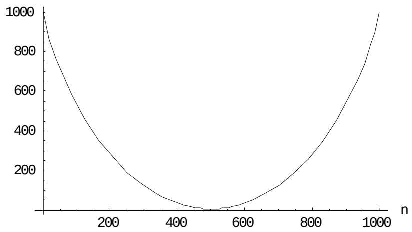


$\langle W_{brut} \rangle$, en unité $kT\ell n2$, en fonction de N.

Le graphe complet révèle que le travail moyen brut extractible est en permanence négatif, variant : entre -0.693 kT et -0.5 kT, selon le nombre de molécules présentes dans l'enceinte.

Ce travail brut n'est cependant pas tout bénéfice : chaque extraction possède un coût entropique conformément au principe de Landauer. Toute extraction de travail qu'on souhaite réitérer exige, en effet, qu'on mémorise, d'une manière ou d'une autre, le résultat de la mesure de la différence, 2n-N, obtenue lors de l'extraction précédente. Selon le procédé de Bennett, cela implique l'encodage d'un caractère dans l'alphabet qui en comporte N+1. Cette mémorisation est essentielle au bon fonctionnement du robot qui doit décider, au terme de chaque extraction, où il doit déplacer son bras pour récupérer la cloison là où la manœuvre précédente l'a menée et la replacer au milieu de l'enceinte. L'encodage préfixe optimal du n$^{\text{ième}}$ état de la clef de mesure requiert, $\ell g(p_{n,N-n})$ bits, dont l'effacement dissipera, tôt ou tard le travail :

$$W_{eff} = -kT\ell n(2)\ell g(p_{n,N-n}) = -kT\ell n2\ell g\frac{C_N^n}{2^N} \quad (J).$$

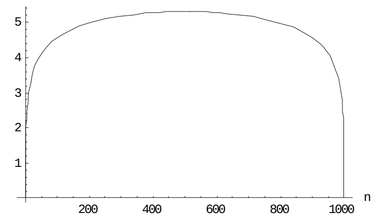


W_{eff} en unités $kT\ell n2$, en fonction de n (N=1000).

Les graphes de W_{brut} et W_{eff} sont quasiment complémentaires. Lorsqu'on calcule leur somme on trouve que le travail net,

$$W_{net} = -kT\ell n(2)\left[n\ell g\frac{2n}{N} + (N-n)\ell g\left(2-\frac{2n}{N}\right) + \ell g\frac{C_N^n}{2^N}\right]$$

est partout positif sauf aux extrémités où il est nul.



W_{net}, en unités $kT\ell n2$, en fonction de n (N=1000).

Lorsque N croît, ce graphe s'aplatit de plus en plus au niveau d'une valeur médiane presque constante dont on peut calculer la valeur asymptotique par une application de la formule de Sterling. On trouve que le plateau se situe à la valeur, $\ell g\sqrt{N\pi/2}$.

On peut encore calculer le coût moyen de l'effacement :

$$\left\langle W_{eff}\right\rangle = -kT\ell n(2)\sum_{n=0}^{N}\frac{C_N^n}{2^N}\ell g\left(\frac{C_N^n}{2^N}\right) \quad (J)$$

dont les premières valeurs sont (N=1, 2, 3, …) :

{1, 1.5, 1.81128, 2.03064, 2.19819} $kT\ell n2 \quad (J)$.

Aux grandes valeurs de N, la suite, $\langle W_{eff} \rangle$ possède le comportement asymptotique,

$$\langle W_{eff} \rangle \approx kT\left[0.5\ell nN + \frac{1+\ell n(\pi/2)}{2} + O(1/N)\right] \quad (J)$$

qui domine celui de $\langle W_{brut} \rangle$ par un terme logarithmique.

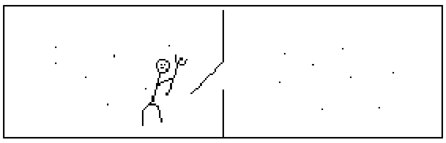
En résumé, le coût de l'effacement n'est jamais inférieur au travail brut extrait. A la limite dans le cas exceptionnel où toutes les molécules sont rassemblées dans un seul compartiment, il l'égale. Jamais le bilan ne fait état d'un travail net extrait.

Insistons sur ce fait que l'on paye la programmation du robot qui doit pouvoir enlever la cloison à l'endroit précis où l'extraction précédente l'a menée afin d'être en mesure de recommencer la manœuvre. Une conclusion s'impose : ce n'est pas l'extraction d'un travail au contact d'une source unique qui est impossible, c'est son extraction répétée.

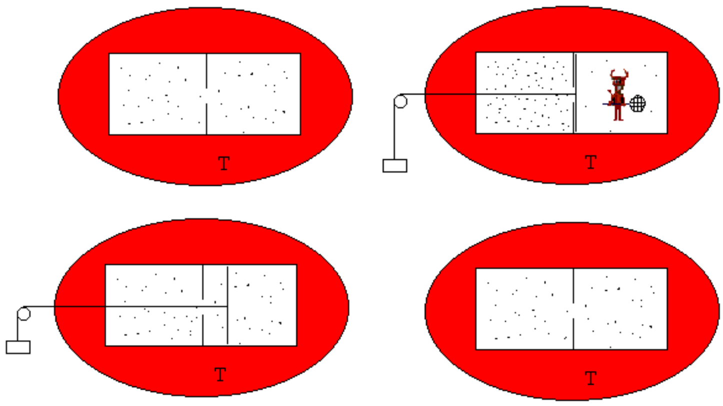
L'exorcisme du Démon de Maxwell.

Le principe de Landauer contient l'argument qui terrasse le Démon de Maxwell. Il existe deux versions équivalentes de ce Démon, baptisées Démon en pression et Démon en température. Nous nous limiterons ici au démon en pression tel que présenté par Maxwell en 1871.

Considérons deux compartiments identiques, séparés par une cloison munie d'une trappe qu'un petit « Démon » pourrait manipuler à loisir. Ils contiennent, à l'équilibre, des quantités égales d'un même gaz à même température et même pression.



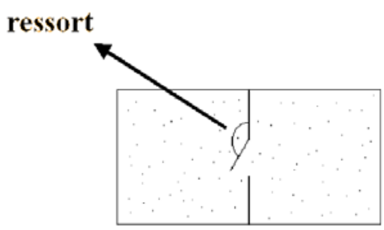
Maxwell imagine un Démon capable d'opérer un tri parmi les molécules : les molécules déjà présentes dans le compartiment de gauche sont priées d'y rester tandis que celles qui sont à droite sont encouragées à passer à gauche. Au terme d'un temps suffisamment long, on peut imaginer qu'un nombre suffisant de molécules sont rassemblées dans le compartiment de gauche. On peut alors se servir de la différence de pression ainsi créée pour actionner un piston qui soulèvera une masse extérieure en empruntant de la chaleur à un thermostat unique. Comme l'opération semble éternellement renouvelable, on aura créé un moteur monotherme, une infraction flagrante à l'énoncé de Kelvin.



Ce paradoxe a déchaîné passions et commentaires pendant cent ans. On a écrit des livres entiers proposant des résolutions tellement diverses que, fatalement, la majorité d'entre elles, sinon toutes, doivent être fausses. Parmi les "solutions" de la première heure, on trouve celle qui rejette avec dédain l'argument de Maxwell : l'expérience semble difficilement réalisable et l'on sait les dangers qu'il y a à prêter de l'importance à un protocole qui ne serait pas opérationnel.

D'autres ont voulu faire sortir le problème du cadre de la physique en conférant au Démon une forme d'intelligence et en posant que ce serait son "cerveau" qui emporterait l'entropie manquante. Bien que cette idée aille dans la bonne direction, elle élude le problème qu'un Démon "recevable" doit être entièrement programmable ou, si l'on préfère, que son "intelligence" ne doit pas dépasser le stade de l'intelligence artificielle.

Même si on arrivait à concevoir un Démon robotisé, Smoluchowsky fut le premier à prétendre que l'expérience ne fonctionnerait pas. Son argument était le suivant : quel que soit le mécanisme utilisé pour opérer le tri des molécules, il devrait, d'une manière ou d'une autre, entrer en contact physique avec celles-ci et, de ce fait, s'échauffer en prenant un mouvement apparenté au mouvement brownien. Cette agitation deviendrait vite telle qu'elle rendrait impossible un tri précis des molécules et le mécanisme cesserait de fonctionner. On pourrait certes tenter de refroidir le mécanisme à l'aide d'un thermostat externe mais ce serait précisément le lieu de création de l'entropie manquante. On trouve dans le cours de Feynman une mise en œuvre de l'argument de Smoluchowsky où le Démon est remplacé par une trappe munie d'un clapet maintenu par un ressort. Cette trappe qui s'ouvre et se ferme automatiquement selon la provenance des molécules est en fait un objet intrus dans le gaz qui possède ses propres degrés de liberté internes. Or on sait que les chocs avec les molécules ont invariablement pour effet de conférer progressivement une énergie moyenne égale à kT/2 à chacun d'eux. La conséquence est que la température du Démon s'élève ou, si l'on préfère suivre le scénario au plus près, que le clapet va se mettre à vibrer de façon désordonnée sans plus remplir sa fonction de tri sélectif.



Cette explication a longtemps été considérée comme le fin mot de l'histoire. Ce n'est plus le cas depuis que Bennett a montré qu'il était imprudent et d'ailleurs inutile d'invoquer une irréversibilité due à l'acte de mesure du Démon. Au fond le paradoxe de Maxwell est déjà posé s'il n'y a qu'un petit nombre, voire une seule, de molécules dans l'enceinte. On s'aperçoit alors que le Démon de Maxwell n'est, au fond, qu'une mise en scène de l'expérience du faux moteur basé sur les fluctuations statistiques d'un gaz et qu'à ce titre, il doit fatalement souffrir du même défaut de fonctionnement**.**

Quel que soit le procédé utilisé par le Démon pour procéder au tri des molécules, il doit, pour chacune d'elles, prendre une décision binaire, celle de laisser passer la molécule ou au contraire de lui refuser le passage. Chaque manœuvre exige l'archivage d'une mesure préalable, seule capable d'assurer une commande automatiquement correcte. Ainsi, même en admettant que le rassemblement des molécules dans un seul compartiment soit réalisable, l'entropie de l'univers n'aurait pas diminué pour autant puisque la diminution constatée au niveau du gaz est intégralement compensée par une augmentation au niveau de la mémoire du robot. Aucune infraction au principe de Kelvin n'est davantage à redouter car le principe de Landauer assure que l'effacement de cette mémoire annule complètement le travail que l'on extrairait en détendant isothermiquement le compartiment où une majorité de molécules auraient été rassemblées.

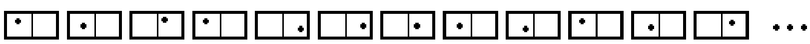
Il apparaît, en définitive, que la réponse au paradoxe de Maxwell ne se situe pas au niveau de la mesure qui précède le tri mais plutôt lors de l'effacement de la mémoire polluée par cette mesure. Il aura finalement fallu un siècle pour que le paradoxe de Maxwell trouve une solution satisfaisante et il est piquant de constater que ce sont deux informaticiens, Landauer et Bennett, qui ont dénoué l'écheveau, preuve supplémentaire des rapports étroits qu'entretiennent la physique et la théorie de l'information.

La notion d'énergie libre.

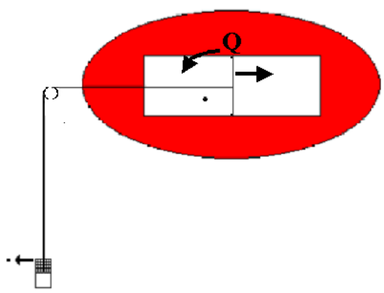
Procédons à l'expérience par la pensée qui utilise le matériel suivant :

Un espace mémoire initialement vierge : 0 0 0 0 0 …

Une suite de gaz désordonnés de Szilard :



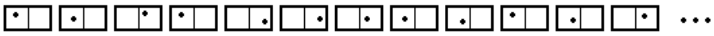
Un thermostat, θ, et une poulie orientée à gauche :



Pour toute boîte de Szilard prise à son tour, effectuer :

1) détecter la molécule et mémoriser un bit : 0 ou 1

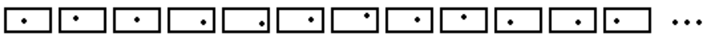
0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 …



2) ssi bit=1 alors retourner la boîte, ensuite extraire isothermiquement et réversiblement le travail, $kT\ell n2 \quad (J)$.

Après N cycles $NkT\ell n2 \quad (J)$ ont été extraits (perdus par θ), avec pour conséquence que les boîtes sont brouillées et que la mémoire est polluée par une suite, s^N, de N bits.

0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 …



Le jour où l'on souhaitera récupérer cet espace mémoire pour d'autres tâches, l'effacement de la suite, s^N, thermalisera automatiquement l'énergie $NkT\ell n2 \quad (J)$: on aura tout reperdu.

Ici intervient une belle subtilité : pourquoi ne pas compresser la suite avant de l'effacer? C'est impossible si la suite est aléatoire donc incompressible (K≈N) ! Mais considérons cet autre exemple d'une suite structurée par un programme court :

0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 …

Un observateur qui connaît ce programme court peut programmer la transformation : $s^N \Rightarrow s^K$. Il ne doit plus effacer que : $KkT\ell n2 \quad (J)$! On en déduit qu'une suite structurée de gaz de Szilard possède un potentiel d'extraction de travail maximum net valant :

$$\left|W_{max}\right| = (N - K)kT\ell n2 \quad (J) = \Delta U - T\Delta S$$

On retrouve l'expression de l'énergie libre qui définit le travail maximum extractible lorsqu'un système subit une transformation au contact d'un thermostat unique.

On voit qu'un expérimentateur intelligent et habile à compresser possède un avantage certain : il peut maximiser le rendement d'une transformation ouverte en minimisant la dissipation d'énergie lors de l'effacement ultérieur des données.

Le moteur ditherme.

Si, dans l'expérience précédente, la suite des gaz de Szilard est aléatoire, aucun travail net ne peut être extrait au contact d'une source unique. Par contre, la situation change radicalement si on utilise, pour l'effacement, une deuxième source, plus froide que celle qui a servi à l'extraction. On peut alors extraire le travail, $NkT_{ch}\ell n2 \quad (J)$, au contact de la source chaude et ne thermaliser que le travail, $NkT_{fr}\ell n2 \quad (J)$, lors de l'effacement. Si on calcule le calcul le rendement de ce moteur ditherme, on retrouve le rendement idéal de Carnot,

$$R_c = 1 - \frac{T_f}{T_{ch}}.$$

Tous comptes faits, rien n'empêche de considérer que le moteur à fluctuations existe réellement mais dans une version *ditherme*, où le DD d'archivage des bits de mesure fonctionne comme un thermostat à 0K !

Le coût thermodynamique du calcul.

La conception d'un ordinateur classique se trouve confrontée à au moins trois exigences incompatibles entre lesquelles on effectue la recherche du meilleur compromis : minimiser la consommation énergétique, améliorer la miniaturisation et augmenter la rapidité.

Une première remarque concerne le sens du mot consommation dans ce cas précis. Lorsqu'on commande à une fusée de quitter le sol lunaire on voit bien qu'une diminution d'énergie interne d'un carburant quelconque est nécessaire pour augmenter les énergies potentielle et cinétique de la fusée. Le terme « consommation » se réfère clairement à cet abaissement d'énergie interne. En revanche, lorsqu'un ordinateur calcule on ne voit plus aussi clairement la raison pour laquelle une consommation d'énergie électrique serait indispensable. A part le fait qu'il calcule, l'activité principale de l'ordinateur au plan énergétique est de dissiper l'énergie fournie sous forme de chaleur dans l'environnement. Il s'agit incontestablement d'une nuisance qui est un obstacle sévère à toute forme de miniaturisation au-delà d'une limite qui ne permet plus de refroidir le système par des moyens raisonnables.

La première question qui se pose est de savoir dans quelle mesure cette dissipation est inévitable. Il importe de distinguer deux causes de dissipation complètement différentes :

- Hardware. L'activation d'un bit se fait habituellement au niveau du hardware par le changement d'état énergétique d'un système élémentaire, en l'occurrence un transistor. Dans une technologie de type CMOS on peut considérer que cela revient à charger une capacité de l'ordre de 5fF sous une tension de 3V ce qui correspond à une énergie d'activation de l'ordre de, 10^5 eV $\approx 10^7$kT, à la température ordinaire. Sans précautions particulières, cette énergie est entièrement dissipée. Pour fixer les idées, la dissipation correspondant à 10^6 transistors sollicités à chaque coup d'une horloge tournant à 1GHz est de l'ordre de 50W. Si l'on compare ces données à la dissipation équivalente au niveau du cerveau humain, de l'ordre de 10^2 kT, on mesure les progrès qui restent possibles.

- Software. Une autre forme de dissipation existe, consécutive à l'effacement de tout bit indésirable. Nous connaissons l'ordre de grandeur que le principe de Landauer associe à cette dissipation logique, soit au minimum, 0.693kT par bit effacé. Il est incomparablement plus faible que le précédent, par exemple le coût logique de l'effacement d'un CDRom de 700 MB ne vaut que 2 10^{-11} J !

A ce stade de la comparaison on peut se demander si cela a un sens de se préoccuper de la dissipation logique. Ce n'est, de fait, certainement pas une préoccupation pour les ingénieurs mais ce peut en être une pour le physicien qui désire connaître les limites que les lois de la physique imposent éventuellement à la dissipation de l'ordinateur en train de calculer.

La dissipation hardware est typiquement le résultat de la succession d'un très grand nombres de transformations physiques opérées à une vitesse telle qu'elle empêche toute forme de réversibilité. Par exemple, la charge d'un condensateur au travers d'une résistance obéit à la loi d'Ohm :

$$V(t) = R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q \quad \Rightarrow \quad Q = \int_0^\infty R\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 dt$$

Si comme on le fait habituellement, pressé par le temps, on utilise une tension de charge constante, $V(t) = V_{max}$, on calcule sans peine que la dépense d'énergie vaut CV_{max}^2.

Il importe de comprendre que cette dépense couvre à la fois et pour une moitié, $(1/2)CV_{max}^2$, l'effet Joule dissipé dans la résistance de charge et pour l'autre moitié l'énergie stockée dans le condensateur chargé. En théorie cette dernière serait récupérable lors de la décharge mais en pratique on ne prend pas cette peine qui se payerait d'un ralentissement inadmissible.

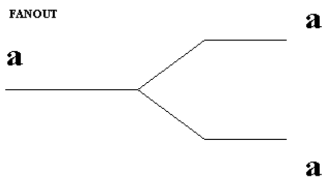
On pourrait faire tendre l'effet Joule vers zéro en procédant plus soigneusement : au lieu de charger la capacité brutalement on la chargerait progressivement selon une loi, par exemple linéaire, $V(t) = V_{max}\frac{t}{\tau}$. L'énergie dissipée ne vaudrait plus que :

$$Q = \int_0^\infty R\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 dt = \frac{RC^2 V_{max}}{\tau}$$

une valeur qui tend bien vers zéro si τ tend vers l'infini ! En résumé ce ne sont pas les lois de la physique qui s'opposent à une dissipation hardware arbitrairement petite, c'est notre empressement, assez compréhensible au demeurant, à voir le calcul se terminer !

Voyons, à présent, les limites physiques de la dissipation logique. Une condition nécessaire saute immédiatement aux yeux : il faut que la logique utilisée soit invertible. Si ce n'est pas le cas, on peut être certain qu'une partie de l'information, créée lors des calculs intermédiaires mais non indispensable pour la suite, sera effacée d'où une dissipation conforme au principe de Landauer. Voyons cela de plus près.

Tout ordinateur doit posséder une architecture qui garantit son universalité au sens de Turing. Au niveau des portes logiques, cela implique que les portes FANOUT et NAND soient implémentées. Si la porte FANOUT est naturellement invertible, la porte NAND, perd par contre en moyenne 1.189 bits à chaque activation :



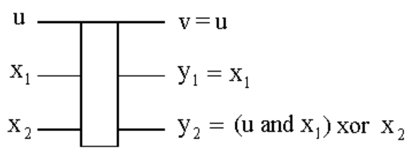
a	b	NAND(a,b)
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2 bits **0.811 bits**

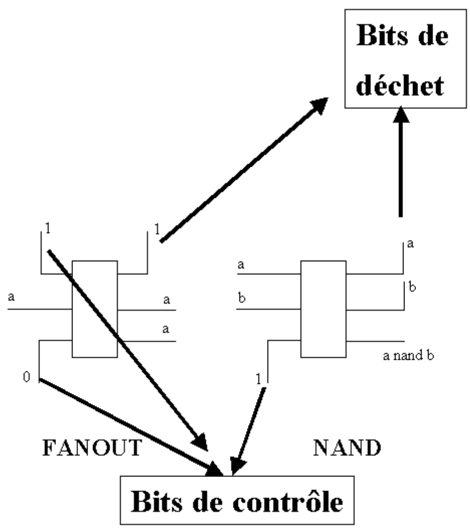
En fait aucune porte logique à deux entrées n'est à la fois universelle au sens de Boole et invertible. Pour construire une porte universelle et invertible, il faut passer à trois entrées et trois sorties : c'est la porte de Fredkin encore appelée porte Controlled-Controlled Not (CCN).

Cette porte possède la table de vérité suivante et on vérifie sans peine qu'elle est sa propre inverse, $CCN^{-1} = CCN$:

u	x_1	x_2		v	y_1	y_2
0	0	0		0	0	0
0	0	1		0	0	1
0	1	0		0	1	0
0	1	1	→	0	1	1
1	0	0		1	0	0
1	0	1		1	0	1
1	1	0		1	1	1
1	1	1		1	1	0
3 bits				3 bits		



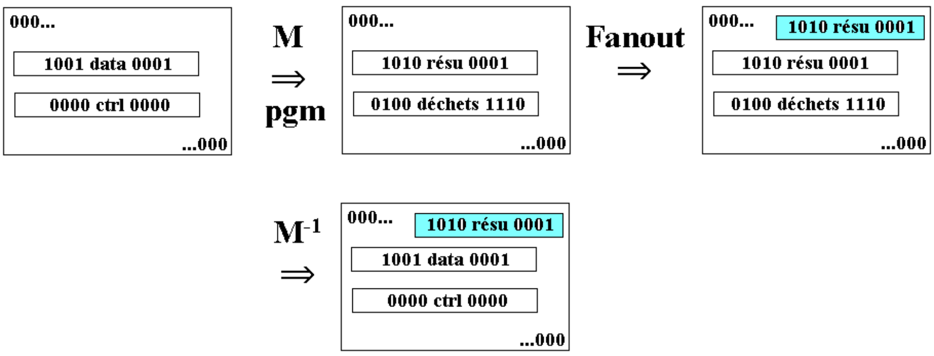
Montrons, à titre d'exemples, que les indispensables portes FANOUT et NAND sont bien des cas particuliers de la porte CCN :



On voit que l'activation invertible d'une porte nécessite d'injecter, à son entrée, des bits surnuméraires de contrôles et de récolter, à la sortie, la réponse cherchée plus des bits de déchets. On peut convenir de n'utiliser que des '0' comme bits de contrôle quitte à insérer une porte Not lorsque l'assemblage des portes exige un bit de contrôle du type '1'.

Vu le nombre de portes de ce type que tout calcul un peu compliqué active, on pourrait craindre d'encombrer progressivement la mémoire de l'ordinateur par des tonnes de déchets dont l'effacement entraînerait tôt ou tard une dissipation majeure.

En fait, il n'en est rien comme l'a montré Bennett : l'utilisation systématique de la porte CCN permet un calcul largement invertible, il suffit de respecter le protocole suivant. On part d'un DD entièrement initialisé à '0' et on réserve une provision de ces '0' comme bits de contrôles. Les données du problème à traiter sont écrites dans un espace réservé. L'activation du programme enchaîne une cascade de portes CCN au terme de la quelle la situation se présente comme suit : les données sont remplacées par les résultats du calcul et les bits de contrôles ont été consommés et remplacés par des bits de déchets. A ce stade, si l'on veut assez normalement conserver une copie des résultats, on active un ensemble de portes FANOUT correctement agencées. Enfin on fait repasser le système par toutes les portes CCN utilisées à l'aller mais dans l'ordre inverse : les bits de déchets redeviennent les bits de contrôle c'est-à-dire des '0' et les résultats redeviennent les données. Au bilan, la seule dissipation qui interviendra se fera lorsqu'on voudra effacer la copie des résultats éventuellement compressés.



La conclusion qui s'impose est la suivante : à l'exception des résultats archivés en forme compressée et aussi longs que soient les calculs intermédiaires, rien dans les lois de la physique n'impose de dissipation donc de consommation minimum à l'ordinateur classique, seule l'exigence de rapidité s'y oppose au niveau hardware.