Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 40e année, nº 1-2, 1971, pp. 13-23

SUR DES COMBINAISONS LINÉAIRES D'UN NOMBRE FINI DE FONCTIONS TRANSCENDANTES COMME SOLUTIONS D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

par André HAUTOT, Dr Sc.
Assistant à l'Université de Liège

RÉSUMÉ

Nous généralisons les résultats d'une étude antérieure consacrée aux solutions polynomiales d'équations différentielles du second ordre. Nous envisageons la possibilité d'écrire ces solutions sous la forme de combinaisons linéaires de fonctions de Weber ou hypergéométriques non polynomiales. Nous étudions également le cas des combinaisons linéaires de fonctions de Bessel. Nous définissons et étudions, un problème inverse : la recherche de l'équation différentielle du second ordre satisfaite par une combinaison linéaire quelconque de deux fonctions transcendantes d'indices consécutifs.

1. Dans trois articles antérieurs [1] nous avons recherché sous quelles conditions les équations différentielles du type

$$\mathrm{D}\mathrm{P}'' + (az^2 + bz + c)\mathrm{P}' + (d + ez)\mathrm{P} = 0 \tag{1}$$

admettaient éventuellement pour solutions des familles de polynômes.

Dans (1), D représentait un polynôme en z du premier, du deuxième ou du troisième ordre à racines distinctes, que l'on pouvait noter après un changement de variable adéquat z, $z(z-1)$ ou $z(1-z)(\alpha - z)$ respectivement.

Nous avons effectivement trouvé une solution au problème, les polynômes s'écrivant dans chacun des cas comme combinaisons linéaires de polynômes d'Hermite, de Laguerre ou de Jacobi respectivement.

Dans ce paragraphe nous généralisons les résultats obtenus en nous intéressant aux solutions non polynomiales. On a les trois théorèmes suivants :

Théorème 1 : l'équation

$$zf'' + (az^2 + bz + c)f' + (d + ez)f = 0 \quad (a \neq 0)$$

a pour solution

$$f = e^{-\frac{1}{4a}(az+b)^2}\left[\sum_{k=0}^{j} \mathrm{A}_k \mathrm{D}_{-\frac{e}{a}-k}\left(\frac{az+b}{\sqrt{-a}}\right)\right]$$

Présenté par F. Bureau, le 18 février 1971.

aux deux conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} c = -j \quad (= 0, -1, -2, \dots \textit{fixé}) \\ \begin{vmatrix} \mathscr{S}_0 & \mathcal{T}_0 & & & \\ \mathscr{R}_1 & \mathscr{S}_1 & \mathcal{T}_1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & \mathscr{R}_{j-1} & \mathscr{S}_{j-1} & \mathcal{T}_{j-1} & \\ & & \mathscr{R}_j & \mathscr{S}_j & \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right.$$

On a posé

$$\left\{\begin{array}{l} \mathscr{R}_k = -\sqrt{-a}\left(-\frac{e}{a} - k + 1\right)(k + c - 1) \\ \mathscr{S}_k = d + bk \\ \mathcal{T}_k = -(k+1)\sqrt{-a} \end{array}\right.$$

$D_\nu(z)$ est la fonction de Weber-Hermite solution de l'équation

$$D''_\nu + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right) D_\nu = 0$$

Les A_k sont solutions du système récurrent compatible

$$\mathscr{R}_k A_{k-1} + \mathscr{S}_k A_k + \mathcal{T}_k A_{k+1} = 0$$

Théorème 2 : l'équation

$$z(z-1)f'' + (az^2 + bz + c)f' + (d + ez)f = 0 \quad (a \neq 0)$$

a pour solution

$$f = \sum_{k=0}^{j} A_k F\left[\frac{e}{a} + k; a + b + c; a(1 - z)\right] \tag{2}$$

aux deux conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} c = j \quad (= 0, 1, 2, \dots \textit{fixé}) \\ \begin{vmatrix} \mathscr{S}_0 & \mathcal{T}_0 & & & \\ \mathscr{R}_1 & \mathscr{S}_1 & \mathcal{T}_1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & \mathscr{R}_{j-1} & \mathscr{S}_{j-1} & \mathcal{T}_{j-1} & \\ & & \mathscr{R}_j & \mathscr{S}_j & \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right.$$

On a posé

$$\left\{\begin{array}{l} \mathscr{R}_k = \left(\frac{e}{a} + k - 1\right)(k - j - 1) \\ \mathscr{S}_k = d + k(b + j) + (j - 2k)\left(\frac{e}{a} + k\right) \\ \mathcal{T}_k = (k+1)\left(\frac{e}{a} + k + 1 - a - b - j\right) \end{array}\right.$$

$F(a;b;z) = 1 + \frac{a}{b}\frac{z}{1!} + \ldots$ est la fonction hypergéométrique dégénérée.

Les A_k sont solutions du système récurrent compatible

$$\mathcal{R}_k A_{k-1} + \mathcal{S}_k A_k + \mathcal{T}_k A_{k+1} = 0$$

Ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer lors de l'étude des solutions polynomiales de l'équation qui fait l'objet de ce théorème 2, une solution du même genre que (2) existe si en plus de la condition déterminante on a $a + b + c = -j$ (qui remplace $c = j$). Il suffit pour trouver l'énoncé complet de ce théorème de remplacer z par $1 - z$ dans l'équation de départ, ainsi qu'il a été fait dans l'article précédemment mentionné.

Théorème 3 : l'équation

$$z(1-z)(\alpha - z)f'' + (az^2 + bz + c)f' + (d + ez)f = 0 \quad (a \neq 0)$$

a pour solution

$$f = \sum_{k=o}^{j} A_k F\left(k - \frac{1 - a \pm \sqrt{(1-a)^2 - 4e}}{2},\right.$$

$$\left.\frac{1 - a \pm \sqrt{(1-a)^2 - 4e}}{2} - k + a + j - 1;\, \frac{a+b+c}{1-\alpha};\, \frac{1-z}{1-\alpha}\right)$$

aux deux conditions suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} c = -\alpha j \quad (= 0, -\alpha, -2\alpha, \ldots \textit{fixé}) \\ \begin{vmatrix} \mathcal{S}_0 & \mathcal{T}_0 & & & \\ \mathcal{R}_1 & \mathcal{S}_1 & \mathcal{T}_1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \mathcal{R}_{j-1} & \mathcal{S}_{j-1} & \mathcal{T}_{j-1} \\ & & & \mathcal{R}_j & \mathcal{S}_j \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right.$$

On a posé

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{R}_k = \dfrac{(\alpha-1)(k-1-m)\left(\dfrac{a+b+c}{1-\alpha} - m+k-a-j\right)(2m-k+a+j)(k-j-1)}{(2m-2k+a+j+1)(2m-2k+a+j)} \\[2ex] \mathcal{S}_k = [d - \alpha Bk - \alpha m(k-j)] - \dfrac{1-\alpha}{(B-A-1)(B-A+1)} \\ \qquad \{jAB(2C-B-A-1) - [Bk+m(k-j)](1-B^2-A^2-C+CB+CA)\} \\[2ex] \mathcal{T}_k = \dfrac{(\alpha-1)(m-k+a+j-2)\left(\dfrac{a+b+c}{1-\alpha} - k-1+m\right)(k+1)(2m+a-k-2)}{(2m-2k+a+j-3)(2m-2k+a+j-2)} \end{array}\right.$$

avec

$$A = k - m, \quad B = m - k + a + j - 1, \quad C = \frac{a + b + c}{1 - \alpha}$$

et

$$m = \frac{1 - a \pm \sqrt{(1 - a)^2 - 4e}}{2}$$

$F(a, b; c; z) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1!} + \ldots$ est la fonction hypergéométrique de Gauss.

Les A_k sont solutions du système récurrent compatible

$$\mathscr{R}_k A_{k-1} + \mathscr{S}_k A_k + \mathcal{T}_k A_{k+1} = 0$$

Il est possible de trouver des solutions du même type si on remplace la condition $c = -\alpha j$ par $a + b + c = -j(1 - \alpha)$ ou par $a\alpha^2 + b\alpha + c = -j\alpha(\alpha - 1)$.

Pour l'écriture complète de ces théorèmes dérivés on se reportera à l'article déjà mentionné à propos de l'étude des solutions polynomiales de la même équation.

Remarques.

1. Les théorèmes précédemment énoncés sur les solutions polynomiales de (1) sont des cas particuliers de ceux-ci. Il suffit d'y adjoindre la condition polynomiale

$e = -an$ pour les deux premières équations

$e = -n(n + a - 1)$ pour la troisième.

En résumé, dans les énoncés relatifs aux solutions polynomiales de (1) seule la relation $e = -an$ [ou $e = -n(n + a - 1)$] mérite réellement le nom de condition polynomiale; la condition déterminante et la relation portant sur les valeurs permises pour c sont plutôt là pour garantir la possibilité d'écrire les solutions de (1) sous la forme de combinaisons linéaires de fonctions transcendantes connues.

2. Nous omettons les démonstrations de ces trois théorèmes car elles ne diffèrent guère de celles qui concernent l'écriture des solutions polynomiales.

3. Si la vérification de la condition portant sur c ne pose aucun problème, il n'en va pas toujours de même de la condition déterminante qui peut être assez compliquée spécialement en ce qui concerne le théorème 3 pour lequel les valeurs de $\mathscr{R}_k$, $\mathscr{S}_k$ et $\mathcal{T}_k$ sont assez compliquées. Fort heureusement, il ressort de l'étude consacrée aux solutions polynomiales de (1) qu'il est toujours possible de remplacer le déterminant des $\mathscr{R}_k\ \mathscr{S}_k\ \mathcal{T}_k$ par celui des $R_k\ S_k\ T_k$ qui est beaucoup plus simple. On a de la sorte :

pour le théorème 1 : $\begin{cases} R_k = a\left(k - 1 + \frac{e}{a}\right) \\ S_k = d + bk \\ T_k = (k + 1)(k + c) \end{cases}$

pour le théorème 2 : $\begin{cases} R_k = a\left(k - 1 + \frac{e}{a}\right) \\ S_k = d + k(b + k - 1) \\ T_k = (k + 1)(c - k) \end{cases}$

pour le théorème 3 : $\begin{cases} R_k = (k-1)(a+k-2)+e \\ S_k = d+bk-(\alpha+1)k(k-1) \\ T_k = (k+1)(c+\alpha k) \end{cases}$

2. *Sur des combinaisons linéaires de fonctions de Bessel.*

Dans ce paragraphe nous établissons un théorème du même genre que les précédents mais portant cette fois sur des combinaisons linéaires de fonctions cylindriques. Nous nous restreignons au cas des fonctions de Bessel de première espèce. Les autres énoncés sont identiques.

Théorème 4 : l'équation

$$(1-z)z^2f'' + (cz-z^2)f' + [\nu^2z^2(1-z)+az+b]f = 0 \tag{3}$$

a pour solution

$$f = \sum_{k=0}^{j} A_k J_{n+k}(\nu z) \tag{4}$$

aux deux conditions suivantes

$$\begin{cases} c = j+1 \qquad (=1,2,3,\ldots \textit{fixé}) \\ \begin{vmatrix} \mathscr{S}_0 & \mathcal{T}_0 & & & \\ \mathscr{R}_1 & \mathscr{S}_1 & \mathcal{T}_1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \mathscr{R}_{j-1} & \mathscr{S}_{j-1} & \mathcal{T}_{j-1} \\ & & & \mathscr{R}_j & \mathscr{S}_j \end{vmatrix} \ldots = 0 \end{cases}$$

n se détermine par $b = -n^2 - jn$

On a posé

$$\begin{cases} \mathscr{R}_k = \dfrac{-\nu(2n+k-1)(j+1-k)}{n+k-1} \\ \mathscr{S}_k = 2[a-(n+k)^2] \\ \mathcal{T}_k = \dfrac{\nu(k+1)(j+1+k+2n)}{n+k+1} \end{cases}$$

Les A_k sont solutions du système récurrent compatible

$$\mathscr{R}_kA_{k-1} + \mathscr{S}_kA_k + \mathcal{T}_kA_{k+1} = 0$$

Preuve : introduire la solution (4) dans l'équation de départ (3). Tenant compte de l'équation différentielle du second ordre satisfaite par J_{n+k} il vient :

$$\sum_{k=0}^{j} A_k \{j\nu z J'_{n+k}(\nu z) + [a-(n+k)^2]\,zJ_{n+k}(\nu z) + [b+(n+k)^2]\,J_{n+k}(\nu z)\} = 0\,?$$

Multipliant et divisant chaque terme de cette somme par $n+k$ et tenant compte des relations de récurrence

$$nJ_n(z) = zJ_{n-1}(z) - zJ'_n(z)$$

et

$$2J'_n(z) = J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)$$

il vient

$$\sum_{k=0}^{j} \frac{A_k}{n+k} \{2(n+k)[a-(n+k)^2] J_{n+k}(\nu z) + [j(n+k) + b + (n+k)^2] \nu J_{n+k-1}(\nu z)$$
$$- [j(n+k) - b - (n+k)^2] \nu J_{n+k+1}(\nu z)\} = 0 ?$$

On voit facilement que si $b = -n^2 - nj$, cette expression peut s'écrire

$$\sum_{k=0}^{j} \{\mathscr{R}_k A_{k-1} + \mathscr{S}_k A_k + \mathcal{T}_k A_{k+1}\} J_{n+k}(\nu z) = 0$$

chaque terme de cette somme pouvant être pris nul vu la condition déterminante. Cela achève la démonstration.

Cas particulier ; Les développements de Neumann limités.

Suivant Whittaker et Watson [2] nous appellons développement de Neumann d'une fonction analytique une expression du type

$$f(z) = aJ_0(z) + bJ_1(z) + cJ_2(z) + \ldots$$

où a, b, c, ... sont des constantes.

Montrons que certains développements limités de ce genre satisfont une équation différentielle du second ordre à deux singularités.

Faisant $n = 0$ dans l'énoncé du théorème 4 on obtient l'énoncé simplifié : l'équation

$$z(1-z)f'' + (j+1-z)f' + [\nu^2 z(1-z) + a] f = 0$$

a pour solution

$$f = \sum_{k=0}^{j} A_k J_k(\nu z)$$

à la condition que

$$\begin{vmatrix} \mathscr{S}_0 & \mathcal{T}_0 & & & \\ \mathscr{R}_1 & \mathscr{S}_1 & \mathcal{T}_1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \mathscr{R}_{j-1} & \mathscr{S}_{j-1} & \mathcal{T}_{j-1} \\ & & & \mathscr{R}_j & \mathscr{S}_j \end{vmatrix} = 0$$

On a posé

$$\begin{cases} \mathscr{R}_k = -(j+1-k)\nu \\ \mathscr{S}_k = 2(a-k^2) \\ \mathcal{T}_k = (j+1+k)\nu \end{cases}$$

Les A_k se déterminent comme solutions du système récurrent compatible

$$\mathscr{R}_k A_{k-1} + \mathscr{S}_k A_k + \mathcal{T}_k A_{k+1} = 0$$

3. *Théorèmes inverses.*

Les quatre théorèmes que nous venons d'établir, nous les appellerons directs, ont montré que certaines équations différentielles du second ordre (à $n+1$ singularités) possédaient pour solutions des combinaisons linéaires *bien choisies* de fonctions transcendantes (celles-ci étant elles-mêmes solutions d'équations à n singularités). Il est bien clair que ces théorèmes ne peuvent pas être inversés en toute généralité : les combinaisons linéaires évoquées ci-dessus doivent être correctement choisies et ne peuvent nullement être arbitraires; par exemple, la fonction

$$f(z) = J_n(z) + \lambda_1 J_{n+1}(z) + \lambda_2 J_{n+2}(z) + \lambda_3 J_{n+3}(z) \tag{5}$$

ne sera jamais solution de l'équation (3) lorsque λ_1, λ_2 et λ_3 seront des constantes quelconques. Cela est dû au fait qu'il y a trop de conditions à imposer et pas assez de paramètres à notre disposition.

Toutefois si on limite le nombre des fonctions transcendantes dans les expressions du genre de (5), il y a peut-être des perspectives. Celles-ci existent effectivement et sont résumées dans les quatre théorèmes inverses qui suivent. Dans chaque cas on vérifiera que l'on est obligé de se limiter à des combinaisons linéaires de deux termes.

Théorème inverse 1 : la fonction

$$f(u) = D_\nu(u) + \lambda D_{\nu-1}(u)$$

satisfait l'équation

$$\left(-\frac{\lambda^2+\nu}{\lambda} - u\right) f'' + f' + \left(\frac{1}{4}u^3 + \frac{\lambda^2+\nu}{4\lambda}u^2 - \nu u + \frac{\lambda^2 - \nu - 2\nu\lambda^2 - 2\nu^2}{2\lambda}\right) f = 0$$

Preuve : lorsque les hypothèses sont remplies le théorème direct 1 s'écrit avec la nouvelle variable $u = \dfrac{az+b}{\sqrt{-a}}$ et lorsque $j = 1$: l'équation

$$\left(\frac{b}{\sqrt{-a}} - u\right) g'' + \left(u^2 - \frac{b}{\sqrt{-a}}u + 1\right) g' + \left(\frac{ad - eb}{a\sqrt{-a}} + \frac{e}{a}u\right) g = 0 \tag{6}$$

a pour solution

$$g = e^{\frac{1}{4}u^2}\left[A_0 D_{-\frac{e}{a}}(u) + A_1 D_{-\frac{e}{a}-1}(u)\right]$$

avec :

$$\begin{cases} \mathcal{S}_0 A_0 + \mathcal{T}_0 A_1 = 0 \\ \mathcal{R}_1 A_0 + \mathcal{S}_1 A_1 = 0 \end{cases}$$

Du théorème direct on déduit sans peine le théorème inverse si l'on peut résoudre par rapport à a, b, c et d le système suivant à trois équations :

$$\begin{cases} \mathcal{S}_0 + \lambda \mathcal{T}_0 = 0 \\ \mathcal{R}_1 + \lambda \mathcal{S}_1 = 0 \end{cases} \qquad \nu = -\frac{e}{a} \tag{7}$$

Or on calcule

$$\begin{cases} \mathscr{S}_0 = d & \mathscr{R}_1 = -\frac{e}{a}\sqrt{-a} \\ \mathscr{S}_1 = d + b & \mathfrak{T}_0 = -\sqrt{-a} \end{cases}$$

Le système (7) se résout sans difficulté; on trouve

$$\frac{b}{\sqrt{-a}} = -\frac{\lambda^2 + \nu}{\lambda} \qquad \frac{ad - eb}{a\sqrt{-a}} = \frac{\lambda^2 - \nu\lambda^2 - \nu^2}{\lambda}$$

Portant ces expressions dans (6) on obtient l'équation qui donne g. Celle qui donne f s'en déduit sans difficultés puisque

$$g = e^{\frac{1}{4}u^2} f$$

Remarque : si dans l'énoncé de ce théorème inverse 1 on fait tendre λ vers zéro, on retrouve l'équation de Weber satisfaite par D_ν.

Théorème inverse 2 : la fonction

$$f(u) = F(\alpha\,;\beta\,;u) + \lambda F(\alpha + 1\,;\beta\,;u)$$

satisfait l'équation

$$u\left\{-\frac{\lambda+1}{\lambda}[(\alpha + 1 - \beta)\lambda + \alpha] - u\right\} f''$$
$$+ \left\{u^2 - \frac{1}{\lambda}[\lambda(\lambda + 2)(\beta - \alpha - 1) - \alpha]\,u - \frac{\lambda+1}{\lambda}\beta\,[(\alpha + 1 - \beta)\lambda + \alpha]\right\} f'$$
$$- \left\{\frac{1}{\lambda}[(\alpha + 1)\lambda + \alpha]\,[(\beta - \alpha - 1)\lambda - \alpha] - \alpha u\right\} f = 0$$

Preuve : lorsque les hypothèses sont remplies le théorème direct 2 s'écrit avec la nouvelle variable $u = a(1 - z)$ et lorsque $j = 1$: l'équation

$$u(a - u)f'' + [u^2 - (2a + b)u + a(a + b + 1)]\,f' - \left[(d + e) - \frac{e}{a}\,u\right] f = 0 \qquad (8)$$

a pour solution

$$f = A_0F\left(\frac{e}{a}\,;a + b + 1\,;u\right) + A_1F\left(\frac{e}{a} + 1\,;a + b + 1\,;u\right)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathscr{S}_0A_0 + \mathfrak{T}_0A_1 = 0 \\ \mathscr{R}_1A_0 + \mathscr{S}_1A_1 = 0 \end{cases}$$

Du théorème direct on déduit sans peine le théorème inverse si l'on peut résoudre par rapport à a, b, d, et e le système suivant à quatre équations :

$$\begin{cases} \mathscr{S}_0 + \lambda\mathfrak{T}_0 = 0 & a + b + 1 = \beta \\ \mathscr{R}_1 + \lambda\mathscr{S}_1 = 0 & \dfrac{e}{a} = \alpha \end{cases} \qquad (9)$$

Or on calcule

$$\begin{cases} \mathscr{S}_0 = d + \dfrac{e}{a} & \mathscr{R}_1 = -\dfrac{e}{a} \\ \mathscr{S}_1 = d + b - \dfrac{e}{a} & \mathcal{T}_0 = \dfrac{e}{a} - a - b \end{cases}$$

Le système (9) se résout sans difficulté; on trouve

$$a = -\frac{\lambda + 1}{\lambda}[(\alpha + 1 - \beta)\lambda + \alpha]$$

$$2a + b = \frac{1}{\lambda}[\lambda(\lambda + 2)(\beta - \alpha - 1) - \alpha]$$

$$d + e = \frac{1}{\lambda}[(\alpha + 1)\lambda + \alpha][(\beta - \alpha - 1)\lambda - \alpha]$$

Il suffit d'introduire ces expressions dans (8) pour obtenir le théorème inverse 2.

Remarque : si dans l'énoncé de ce théorème inverse 2 on fait tendre λ vers zéro, on retrouve l'équation hypergéométrique confluente.

Théorème inverse 3 : la fonction

$$f(u) = \mathrm{F}(\beta, \gamma; \delta; u) + \lambda\mathrm{F}(\beta + 1, \gamma - 1; \delta; u)$$

satisfait l'équation

$$u(1 - u)\left[\frac{\lambda + 1}{\lambda}\,\frac{\lambda(\gamma - 1)(\delta - \beta - 1) - \beta(\gamma - \delta)}{(\gamma - \beta - 1)^2} - u\right] f'' + [(\beta+\gamma)u^2 + \mathrm{A}u+\mathrm{B}]\, f'$$
$$+ \left\{\beta(\gamma - 1)u - \frac{[\lambda(\gamma - 1)(\delta - \beta - 1) - \beta(\gamma - \delta)](\lambda\gamma - \lambda+\beta\gamma\lambda+\beta\gamma - \beta\lambda)}{\lambda(\gamma - \beta - 1)^2}\right\} f = 0$$

où on a posé pour abréger

$$\mathrm{A} = -\delta - \frac{(\beta+\gamma)(\lambda+1)[\lambda(\gamma-1)(\delta-\beta-1)-\beta(\gamma-\delta)] + [\beta+\lambda(\gamma+1)][\lambda(\delta-\beta-1) + (\delta-\gamma)]}{\lambda(\gamma - \beta - 1)^2}$$

$$\mathrm{B} = \frac{\delta(\lambda + 1)[\lambda(\gamma - 1)(\delta - \beta - 1) - \beta(\gamma - \delta)]}{\lambda(\gamma - \beta - 1)^2}$$

Preuve : lorsque les hypothèses sont remplies le théorème direct 3 s'écrit avec la nouvelle variable $u = \dfrac{1 - z}{1 - \alpha}$ et lorsque $j = 1$: l'équation

$$u(1 - u)\left(\frac{1}{1-\alpha} - u\right) f'' + \left[au^2 + \frac{2a+b}{\alpha - 1}\,u + \frac{a+b-\alpha}{(\alpha - 1)^2}\right] f' + \left(\frac{d+e}{\alpha-1} + eu\right) f=0 \quad (10)$$

a pour solution

$$f = \mathrm{A}_0\mathrm{F}\left(-m, m + a; \frac{a + b - \alpha}{1 - \alpha}; u\right) + \mathrm{A}_1\mathrm{F}\left(1 - m, m + a - 1; \frac{a + b - \alpha}{1 - \alpha}; u\right)$$

avec : $\begin{cases} \mathscr{S}_0 A_0 + \mathcal{T}_0 A_1 = 0 \\ \mathscr{R}_1 A_0 + \mathscr{S}_1 A_1 = 0 \end{cases}$ et $e = -m(m + a - 1)$

Du théorème direct on déduit sans peine le théorème inverse si l'on peut résoudre par rapport à a, b, d et e le système suivant à cinq équations :

$$\begin{cases} \mathscr{S}_0 + \lambda \mathcal{T}_0 = 0 & \delta = \dfrac{a + b - \alpha}{1 - \alpha} \\ \mathscr{R}_1 + \lambda \mathscr{S}_1 = 0 & \\ \beta = -m & \gamma = m + a \end{cases} \tag{11}$$

Or on calcule

$$\begin{cases} \mathscr{S}_0 = d + \alpha m - \dfrac{m(1 - \alpha)(1 - m - \delta)}{2m + a - 1} \qquad \mathscr{R}_1 = \dfrac{m(\alpha - 1)(\delta - m - a)}{2m + a - 1} \\ \mathscr{S}_1 = d - \alpha(m + a - 1) - \dfrac{(m + a - 1)(1 - \alpha)(m + a - \delta)}{2m + a - 1} \\ \mathcal{T}_0 = \dfrac{(m + a - 1)(\alpha - 1)(\delta + m - 1)}{2m + a - 1} \end{cases}$$

Le système (11) se résout sans difficulté; on trouve

$$\frac{1}{1 - \alpha} = \frac{(\lambda + 1)[\lambda(\gamma - 1)(\delta - \beta - 1) - \beta(\gamma - \delta)]}{\lambda(\gamma - \beta - 1)^2}$$

$$a = \beta + \gamma \qquad e = \beta(\gamma - 1)$$

$$\frac{2a + b}{\alpha - 1} = \mathrm{A} \qquad \frac{a + b - \alpha}{(\alpha - 1)^2} = \mathrm{B}$$

$$\frac{d + e}{\alpha - 1} = -\frac{[\lambda(\gamma - 1)(\delta - \beta - 1) - \beta(\gamma - \delta)](\lambda\gamma - \lambda + \beta\gamma\lambda + \beta\gamma - \beta\lambda)}{\lambda(\gamma - \beta - 1)^2}$$

Il suffit d'introduire ces expressions dans (10) pour obtenir le théorème inverse 3.

Remarque : si dans l'énoncé de ce théorème inverse 3 on fait tendre λ vers zéro, on retrouve l'équation hypergéométrique.

Théorème inverse 4 : la fonction

$$f = \mathrm{J}_n(u) + \lambda \mathrm{J}_{n+1}(u)$$

satisfait l'équation

$$\left[-\frac{\lambda(2n + 1)}{1 + \lambda^2} - u\right] u^2 f'' - \left[\frac{2\lambda(2n + 1)}{1 + \lambda^2} u + u^2\right] f'$$
$$+ \left\{\left[-\frac{\lambda(2n + 1)}{1 + \lambda^2} - u\right] u^2 + \frac{n^2 + \lambda^2(n + 1)^2}{1 + \lambda^2} u + \frac{\lambda n(n + 1)(2n + 1)}{1 + \lambda^2}\right\} f = 0$$

Preuve : lorsque les hypothèses sont remplies le théorème direct 4 s'écrit avec la nouvelle variable $u = \nu z$ et lorsque $j = 1$: l'équation

$$(\nu - u)u^2 f'' + (2\nu u - u^2) f' + [u^2(\nu - u) + au + b\nu] f = 0 \tag{12}$$

a pour solution

$$f = A_0 J_n(u) + A_1 J_{n+1}(u)$$

avec : $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}_0 A_0 + \mathcal{T}_0 A_1 = 0 \\ \mathcal{R}_1 A_0 + \mathcal{S}_1 A_1 = 0 \end{array} \right.$

Du théorème direct on déduit sans peine le théorème inverse si l'on peut résoudre par rapport à ν, a et b le système suivant à trois équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}_0 + \lambda \mathcal{T}_0 = 0 \\ \mathcal{R}_1 + \lambda \mathcal{S}_1 = 0 \end{array} \right. \qquad b = -n(n+1) \tag{13}$$

Or on calcule

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}_0 = 2(a - n^2) \\ \mathcal{S}_1 = 2\,[a - (n+1)^2] \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \mathcal{R}_1 = -2\nu \\ \mathcal{T}_0 = 2\nu \end{array}$$

Le système (13) se résout sans difficulté; on trouve

$$\nu = \frac{-\lambda(2n+1)}{1+\lambda^2} \qquad a = \frac{n^2 + \lambda^2(n+1)^2}{1+\lambda^2}$$

Il suffit d'introduire ces expressions dans (12) pour obtenir le théorème inverse 4.

Remarque : si dans l'énoncé de ce théorème inverse 4 on fait tendre λ vers zéro on retrouve l'équation de Bessel.

4. *Conclusion.*

Dans cet article nous nous sommes proposé d'élargir notre connaissance de certaines fonctions transcendantes en recherchant si des combinaisons linéaires de telles fonctions, soit arbitraires, soit convenablement choisies, sont susceptibles de satisfaire des équations différentielles du second ordre.

Lorsque les coefficients de la combinaison linéaire sont bien choisis, le problème peut être résolu pour un nombre quelconque de termes. Lorsqu'ils sont arbitraires, il faut se limiter à deux termes du moins si l'on ne prend en considération que les équations dont le nombre de singularités ne dépasse pas de plus d'une unité celui des équations satisfaites par les fonctions que l'on combine. Sans qu'il soit actuellement possible de s'avancer davantage il est possible sinon probable que des études ultérieures montreront que des combinaisons linéaires contenant plus de deux termes réclament l'adjonction de singularités supplémentaires à l'équation différentielle. Une voie semble dès lors largement tracée qui permet de renouveler quelque peu l'étude classique des fonctions transcendantes comme solutions d'équations différentielles du second ordre.

Institut de Physique
Sart Tilman par Liège I (Belgique)

BIBLIOGRAPHIE

[1] André HAUTOT, *Bull. Soc. Royale Sc. Liège*, **38** (1969), 654; **38** (1969), 660; **40** (1970), à paraître.

[2] E. T. WHITTAKER et G. N. WATSON, Modern Analysis (Cambridge at the University Press; 4e édition, 1935).