Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 38e année, nº 11-12, 1969, pp. 660-663

SUR LES SOLUTIONS POLYNOMIALES DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $zP''_n + (az^2 + bz + c)P'_n + (d + ez + fz^2)P_n = 0$

par André HAUTOT
Assistant à l'Université de Liège

RÉSUMÉ

Dans le cadre de la recherche des solutions polynomiales de l'équation générale

$$(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)P''_n + (\alpha' z^2 + \beta' z + \gamma')P'_n + (\alpha'' z^2 + \beta'' z + \gamma'')P_n = 0,$$

nous consacrons le présent exposé au cas particulier $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$. Des solutions polynomiales sont trouvées de même que la forme des polynômes correspondants, à savoir des combinaisons linéaires d'un nombre fixé de polynômes d'Hermite.

1. Le présent article fait suite à un article d'inspiration identique paru antérieurement [1].

Si dans l'équation générale de départ

$$(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)P''_n + (\alpha' z^2 + \beta' z + \gamma')P'_n + (\alpha'' z^2 + \beta'' z + \gamma'')P_n = 0,$$

on pose $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$, l'équation peut se mettre sous la forme

$$zP''_n + (az^2 + bz + c)P'_n + (d + ez + fz^2)P_n = 0 \tag{1}$$

Seules nous intéressent les solutions polynomiales

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k z^k.$$

Il est facile de voir que $e = -an$ et $f = 0$ sont deux conditions polynomiales nécessaires. Elles ne sont toutefois pas suffisantes. Il convient en effet d'y adjoindre la condition déterminante obtenue en introduisant dans (1) l'expression donnant P_n :

$$\begin{vmatrix} S_0 & T_0 & & & \\ R_1 & S_1 & T_1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & R_{n-1} & S_{n-1} & T_{n-1} \\ & & & R_n & S_n \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

Présenté par F. Bureau, le 20 novembre 1969.

où l'on a posé

$$R_k = a(k - 1 - n)$$
$$S_k = d + bk$$
$$T_k = (k + 1)(k + c)$$

Il n'est guère possible d'expliciter davantage cette condition polynomiale car l'ordre du déterminant augmente avec l'ordre n du polynôme. Il est cependant possible de trouver une famille entière de solutions polynomiales : paraphrasant un raisonnement déjà explicité dans l'article précédent, nous remarquons que si $c = -j$ $(= 0, -1, -2, \ldots, \textit{fixé})$, $T_j = 0$ et une solution à notre problème se trouve en adjoignant à $e = -an$ et $f = 0$, la condition polynomiale supplémentaire

$$\begin{vmatrix} S_0 & T_0 & & & \\ R_1 & S_1 & T_1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & R_{j-1} & S_{j-1} & T_{j-1} \\ & & & R_j & S_j \end{vmatrix} = 0$$

2. *Forme des solutions polynomiales.*

Si dans (1) les conditions polynomiales suivantes sont réalisées :

$$\left\{\begin{array}{l} c = -j \qquad (= 0, -1, -2, \ldots, \textit{fixé}) \\ \left.\begin{array}{l} e = -an \\ f = 0 \end{array}\right\} \text{ deux conditions nécessaires} \\ \begin{vmatrix} S_0 & T_0 & & & \\ R_1 & S_1 & T_1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & R_{j-1} & S_{j-1} & T_{j-1} \\ & & & R_j & S_j \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right.$$

alors les solutions P_n s'écrivent comme combinaisons linéaires d'un nombre *fixé* de polynômes d'Hermite :

$$P_n = \sum_{k=0}^{j} A_k H_{n-k} \left(\frac{az + b}{\sqrt{-2a}}\right) \tag{3}$$

Preuve.

Introduisant (3) dans (1) et utilisant les relations :

$$H_n'' - 2yH_n' + 2nH_n = 0$$
$$H_n' = 2nH_{n-1}$$

il reste à démontrer :

$$\sum_{k=0}^{j} A_k \left\{ \frac{2ac}{\sqrt{-2a}} (n-k) H_{n-k-1} + (d+bk) H_{n-k} - ky\sqrt{-2a} H_{n-k} \right\} = 0 ?$$

Remplaçant yH_{n-k} par une combinaison à coefficients constants de H_{n-k-1} et H_{n-k+1} à l'aide de la relation $H_n = 2yH_{n-1} - 2(n-1)H_{n-2}$, il vient tenant compte de ce que $c = -j$:

$$\sum_{k=0}^{j} \{A_{k-1}(c+k-1)\, 2(n-k+1)\sqrt{-2a} - A_k 2(d+bk) \\ + A_{k+1}(k+1)\sqrt{-2a}\} H_{n-k} = 0 ?$$

Cette relation est exacte si le déterminant suivant est nul.

$$\begin{vmatrix} \mathscr{S}_0 & \mathcal{T}_0 & & & \\ \mathscr{R}_1 & \mathscr{S}_1 & \mathcal{T}_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mathscr{R}_{j-1} & \mathscr{S}_{j-1} & \mathcal{T}_{j-1} \\ & & & \mathscr{R}_j & \mathscr{S}_j \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

où l'on a posé

$$\mathscr{R}_k = -\sqrt{-2a}(n-k+1)(k+c-1)$$
$$\mathscr{S}_k = d + bk$$
$$\mathcal{T}_k = -(k+1)\frac{1}{2}\sqrt{-2a}$$

Puisque la forme (3) est polynomiale, cette relation (4) ne peut qu'être équivalente à (2). Le théorème est donc démontré. De plus, le lecteur vérifiera la curieuse égalité entre déterminants, valable pour toutes valeurs entières de j(N.B. $c = -j$) :

$$\begin{vmatrix} S_0 & T_0 & & & \\ R_1 & S_1 & T_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & R_{j-1} & S_{j-1} & T_{j-1} \\ & & & R_j & S_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathscr{S}_0 & \mathcal{T}_0 & & & \\ \mathscr{R}_1 & \mathscr{S}_1 & \mathcal{T}_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mathscr{R}_{j-1} & \mathscr{S}_{j-1} & \mathcal{T}_{j-1} \\ & & & \mathscr{R}_j & \mathscr{S}_j \end{vmatrix}$$

Remarques.

1) Dans l'expression (3) de la solution, les A_k sont solutions du système récurrent :

$$\mathscr{R}_k A_{k-1} + \mathscr{S}_k A_k + \mathcal{T}_k A_{k+1} = 0$$

2) Les polynômes P_n satisfont l'équation (1) qui ne possède qu'une seule singularité. Nous avons démontré que P_n pouvait s'écrire sous la forme d'une com-

binaison linéaire d'un nombre fixé de polynômes d'Hermite. Si on se rappelle que les polynômes d'Hermite satisfont une équation à zéro singularité, on constatera que le nombre de singularité a décru d'une unité. Un comportement semblable a été signalé dans l'article précédent à propos de l'équation

$$z(z-1)P''_n + (az^2 + bz + c)P'_n + (d + ez + fz^2)P_n = 0.$$

Institut de Physique
Sart Tilman par Liège I (Belgique)

BIBLIOGRAPHIE

[1] André Hautot, *Bull. Soc. Roy. Liège*, n° 11-12 (1969), pp. 654-659.