Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 38e année, nº 11-12, 1969, pp. 654-659

SUR LES SOLUTIONS POLYNOMIALES DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $z(z-1)P''_n + (az^2 + bz + c)P'_n + (d + ez + fz^2)P_n = 0$

par André HAUTOT
Assistant à l'Université de Liège

RÉSUMÉ

Dans le cadre de la recherche des solutions polynomiales de l'équation différentielle générale

$$(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)P''_n + (\alpha' z^2 + \beta' z + \gamma')P'_n + (\alpha'' z^2 + \beta'' z + \gamma'')P_n = 0,$$

nous consacrons le présent exposé au cas particulier $\alpha \neq 0$, $\alpha' \neq 0$, $\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0$. Des conditions polynomiales sont trouvées ainsi que la forme des polynômes correspondants, à savoir des combinaisons linéaires d'un nombre fixé de polynômes de Laguerre. La mécanique quantique utilise des solutions particulières de ce type.

1. Parmi les ouvrages les plus complets tabulant les équations différentielles et leurs solutions, nous citons ceux de G. M. Murphy, E. Kamke, Harry Bateman. Néanmoins, ces essais ne sont pas entièrement satisfaisants : aucune étude systématique n'est entreprise, partant d'une forme générale de l'équation différentielle, par exemple

$$(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)P''_n + (\alpha' z^2 + \beta' z + \gamma')P'_n + (\alpha'' z^2 + \beta'' z + \gamma'')P_n = 0 \tag{1}$$

et étudiant pas à pas chaque cas particulier.

Considérons l'équation (1). Si nous particularisons les valeurs des paramètres, nous trouvons comme solutions des polynômes de Jacobi, Laguerre ou Hermite lorsque les relations de récurrence entre les coefficients de P_n sont à deux termes. Dans ces cas, il est toujours très facile d'écrire les conditions polynomiales.

2. Dans le présent exposé, nous nous intéressons évidemment uniquement aux équations du type (1) qui ne se réduisent pas aux équations de Jacobi, Laguerre ou Hermite. Le tableau qui suit clarifie la situation.

Épinglons tout d'abord la remarque suivante :

Lorsque l'équation possède deux points singuliers (resp. un p.s.), il est toujours possible de les noter 0 et 1 (resp. 0) après un changement de variables adéquat.

Présenté par F. Bureau, le 20 novembre 1969.

Tableau : pour partons de l'équation générale

$$(\alpha u^2 + \beta u + \gamma)P''_n + (\alpha' u^2 + \beta' u + \gamma')P'_n + (\alpha'' u^2 + \beta'' u + \gamma'')P_n = 0$$

I. $\alpha \neq 0$

1er *cas* : $\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0$

(1) $\Rightarrow z(z-1)P''_n + (az^2 + bz + c)P'_n + (d + ez + fz^2)P_n = 0$

si $a = 0$: l'équation obtenue a pour solutions polynomiales les polynômes de Jacobi

si $a \neq 0$: l'équation obtenue est à étudier

2ème *cas* : $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$

(1) $\Rightarrow z^2P''_n + (az^2 + bz + c)P'_n + (d + ez + fz^2)P_n = 0$
à étudier

II. $\alpha = 0$; $\beta \neq 0$

(1) $\Rightarrow zP''_n + (az^2 + bz + c)P'_n + (d + ez + fz^2)P_n = 0$

si $a = 0$: l'équation obtenue a pour solutions polynomiales les polynômes de Laguerre

si $a \neq 0$: à étudier

III. $\alpha = 0$; $\beta = 0$; $\gamma \neq 0$

(1) $\Rightarrow P''_n + (az^2 + bz + c)P'_n + (d + ez + fz^2)P_n = 0$

si $a = 0$: l'équation obtenue a pour solutions polynomiales les polynômes d'Hermite

si $a \neq 0$: à étudier

Il y a essentiellement quatre nouvelles équations à étudier. La suite de cet exposé concerne la première d'entre elles :

$$z(z-1)P''_n + (az^2 + bz + c)P'_n + (d + ez + fz^2)P_n = 0 \qquad (a \neq 0) \tag{2}$$

3. *Solutions polynomiales de l'équation* (2).

Introduisons $P_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k z^k$ dans l'équation (2) et exprimons que tous les λ à partir du rang $n + 1$ sont nuls, λ_n étant différant de zéro. Il vient que $e = -an$, que $f = 0$ (conditions polynomiales nécessaires) et que

$$\begin{cases} d\lambda_0 + c\lambda_1 = 0 \\ \ldots\ldots \\ a(k-1-n)\lambda_{k-1} + [d + k(b + k - 1)]\lambda_k + (c-k)(k+1)\lambda_{k+1} = 0 \\ \ldots\ldots \\ -a\lambda_{n-1} + [d + n(b + n - 1)]\,\lambda_n = 0 \end{cases}$$

C'est un système algébrique homogène ; la condition polynomiale est :

$$\begin{vmatrix} S_0 & T_0 & & & & & \\ R_1 & S_1 & T_1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & R_j & S_j & T_j & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & R_{n-1} & S_{n-1} & T_{n-1} \\ & & & & & R_n & S_n \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

où nous avons posé :

$R_k = a(k - 1 - n)$

$S_k = d + k(b + k - 1)$

$T_k = (c - k)(k + 1)$

Il semble très difficile de trouver la condition polynomiale générale parce que l'ordre du déterminant augmente avec l'ordre n du polynôme. Il est néanmoins possible de trouver une famille de solutions polynomiales.

Si l'on pose $c = j$ ($j = 0, 1, 2, \ldots,$ *fixé*) il en découle que $T_j = 0$. Il est alors possible de satisfaire (3) de deux manières distinctes :

1*ère possibilité* : on impose la condition polynomiale supplémentaire

$$\begin{vmatrix} S_0 & T_0 & & & \\ R_1 & S_1 & T_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & R_{j-1} & S_{j-1} & T_{j-1} \\ & & & R_j & S_j \end{vmatrix} = 0$$

2*ème possibilité* : on pose $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_j = 0$ et on impose la condition polynomiale supplémentaire :

$$\begin{vmatrix} S_{j+1} & T_{j+1} & & & \\ R_{j+2} & S_{j+2} & T_{j+2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & R_{n-1} & S_{n-1} & T_{n-1} \\ & & & R_n & S_n \end{vmatrix} = 0$$

Il est très difficile d'étudier la deuxième possibilité car l'ordre du déterminant augmente à nouveau avec l'ordre n du polynôme. Dans ces conditions, nous nous intéresserons uniquement à la première possibilité.

4. *Énonçons le résultat principal de cette étude* :

Si les quatre conditions suivantes sont satisfaites :

$$\left.\begin{matrix} f = 0 \\ e = -an \end{matrix}\right\} \text{ qui sont deux conditions nécessaires} \tag{4}$$

$$c = j \qquad (= 0, 1, 2, \ldots, \textit{fixé}) \tag{5}$$

$$\begin{vmatrix} S_0 & T_0 & & & \\ R_1 & S_1 & T_1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & R_{j-1} & S_{j-1} & T_{j-1} \\ & & & R_j & S_j \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

l'équation (2) a pour solution polynomiale

$$P_n = \sum_{k=0}^{j} A_k F\,[k - n, a + b + c\,;\; a(1 - z)] \tag{7}$$

où F représente les polynômes de Laguerre : $F(a, b, u) = 1 + \dfrac{a}{b}\dfrac{u}{1!} + \ldots$.

Preuve : Introduisons (7) dans l'équation (2) ; tenant compte de l'équation différentielle satisfaite par les polynômes de Laguerre, il reste à démontrer

$$\sum_{k=0}^{j} A_k \left\{ - cu\,\frac{dF(k - n)}{du} + (d - ak)\,F(k - n) + a\,ku\,F(k - n) \right\} = 0\,? \tag{8}$$

(où on a posé $1 - z = u$).

Utilisant les relations de récurrence entre $u\,F(k - n)$, $u\,\dfrac{d\,F(k - n)}{du}$ d'une part, $F(k + 1 - n)$ et $F(k - 1 - n)$ d'autre part, on voit que si $c = j$, la relation (8) devient

$$\sum_{k=0}^{j} \{(k - 1 - c)(k - 1 - n)A_{k-1} + [d - cn + k(b + 2c - 2k + 2n)]\,A_k$$
$$+ (k + 1)(k + 1 - n - a - b - c)A_{k+1}\}\,F(k - n) = 0\,? \tag{9}$$

Il n'est pas possible de satisfaire (9) que si l'on remplit la condition de compatibilité suivante :

$$\begin{vmatrix} \mathscr{S}_0 & \mathfrak{T}_0 & & & \\ \mathscr{R}_1 & \mathscr{S}_1 & \mathfrak{T}_1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \mathscr{R}_{j-1} & \mathscr{S}_{j-1} & \mathfrak{T}_{j-1} \\ & & & \mathscr{R}_j & \mathscr{S}_j \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

où nous avons posé

$$\mathscr{R}_k = (k - 1 - c)(k - 1 - n)$$
$$\mathscr{S}_k = d - cn + k(b + 2c - 2k + 2n)$$
$$\mathcal{T}_k = (k + 1)(k + 1 - n - a - b - c)$$

Vu que $c = j$ est nécessaire et puisque (7) représente effectivement un polynôme du n^e ordre, la relation (10) est satisfaite automatiquement et de plus (10) doit être équivalent à (6). Le théorème est ainsi démontré.

De plus, (6) et (10) sont équivalents et le lecteur vérifiera la curieuse égalité correcte pour toute valeur entière de j(N.B. $c = j$) :

$$\begin{vmatrix} S_0 & T_0 & & & \\ R_1 & S_1 & T_1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & R_{j-1} & S_{j-1} & T_{j-1} \\ & & & R_j & S_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathscr{S}_0 & \mathcal{T}_0 & & & \\ \mathscr{R}_1 & \mathscr{S}_1 & \mathcal{T}_1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \mathscr{R}_{j-1} & \mathscr{S}_{j-1} & \mathcal{T}_{j-1} \\ & & & \mathscr{R}_j & \mathscr{S}_j \end{vmatrix}$$

Remarques :

1) Une autre solution peut être déduite de la précédente en posant $1 - z = u$ dans (2). L'équation (2) devient :

$$u(u - 1)P''_n + [- au^2 + (2a + b)u - (a + b + c)]\, P'_n + [(d - an) + an\, u]\, P_n = 0$$

La nouvelle solution s'obtient donc en remplaçant simultanément dans les équations numérotées de (4) à (7) :

z par $1 - z$	c par $-(a + b + c)$
a par $-a$	d par $d - an$
b par $2a + b$	n par n

En particulier la condition (5) devient : $a + b + c = -j$.

2) Dans l'expression (7) de la solution, les A_k sont solutions du système récurrent :

$$\mathscr{R}_k A_{k-1} + \mathscr{S}_k A_k + \mathcal{T}_k A_{k+1} = 0$$

3) Le polynôme P_n satisfait une équation à deux singularités. Nous avons prouvé que P_n, pour chaque valeur de n, peut être écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre *fixé* de polynôme de Laguerre ; si le lecteur se rappelle que l'équation de Laguerre ne possède qu'un point singulier, il lui apparaît que le nombre de singularités a décru d'une unité. Ce fait ne semble pas être dû au seul hasard ainsi que nous tenterons de le montrer dans un article ultérieur.

5. Cette théorie trouve une application dans la théorie de l'atome hydrogénoïde de Dirac. Moyennant quelques transformations, l'équation pour une des fonctions

d'onde radiale s'écrit :

$$z(z-1)f'' + [2Z\alpha\sqrt{\gamma}z^2 + 2(s - Z\alpha\sqrt{\gamma})z - (1+2s)]\,f'$$
$$+\left\{2Z\alpha\sqrt{\gamma}\left(Z\alpha\frac{\gamma-1}{2\sqrt{\gamma}}+s\right)z - \left[Z\alpha\sqrt{\gamma}+2Z\alpha\left(Z\alpha\frac{\gamma-1}{2\sqrt{\gamma}}+s\right)\sqrt{\gamma}\pm l+s\right]\right\}f=0$$

(L'autre fonction radiale g obéit une équation du même type).

Les paramètres qui apparaissent sont des constantes physiques.

$$\gamma = \frac{m_0c^2 - E}{m_0c^2 + E} \qquad z = -\frac{E + m_0c^2}{c\hbar Z\alpha}\,r$$

l = nombre quantique orbital ; $\quad s = \sqrt{l^2 - Z^2\alpha^2}$

α = constante de structure fine.

En fait, f et g satisfont un système différentiel du premier ordre couplé. Tous les auteurs partent de ce système couplé pour écrire la condition polynomiale.

La théorie qui précède permet de trouver la condition polynomiale en raisonnant sur le système découplé du deuxième ordre ainsi qu'on le fait le plus souvent en mécanique quantique. Le lecteur vérifiera de suite que

$$\begin{cases} e = -an \\ a+b+c = -1 & \text{(donc } j = 1) \\ \begin{vmatrix} \mathscr{S}_0 & \mathscr{T}_0 \\ \mathscr{R}_1 & \mathscr{S}_1 \end{vmatrix} & = -(an-2a-b-d)(d-an) - an = 0 \end{cases}$$

sont satisfaits si l'énergie est quantifiée selon la relation

$$-n = s + Z\alpha\frac{\gamma-1}{2\sqrt{\gamma}}$$

La solution f apparaît alors comme étant une combinaison linéaire de $j+1=2$ polynômes de Laguerre. Idem pour g.

Conclusion.

Le présent article a étudié des solutions polynomiales d'une équation différentielle bien définie. Des développements ultérieurs des sciences physiques utiliseront peut-être des polynômes de ce type. Un premier exemple existe dans la théorie de l'atome hydrogénoïde.

Institut de Physique
Sart Tilman par Liège I (Belgique)

BIBLIOGRAPHIE

G. M. Murphy, Ordinary differential equations and their solutions. D. Van Nostrad Company Inc. Princeton.

E. Kamke, Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959.

Harry Bateman, Higher transcendental functions. Mc Graw Hill Book Company Inc. 1953.