Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 40e année, nº 1-2, 1971, pp. 7-12

SUR LES SOLUTIONS POLYNOMIALES DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$z(1-z)(\alpha - z)P''_n + (az^2 + bz + c)P'_n + (d + ez + fz^2)P_n = 0$

par André HAUTOT, Dr Sc.
Assistant à l'Université de Liège

RÉSUMÉ

Nous recherchons des solutions polynomiales de l'équation différentielle

$$z(1-z)(\alpha - z)P''_n + (az^2 + bz + c)P'_n + (d + ez + fz^2)P_n = 0$$

possédant trois singularités distinctes. Six possibilités différentes existent menant toutes à des familles de polynômes s'écrivant comme combinaisons linéaires d'un nombre fixé de polynômes de Jacobi.

1. Nous avons étudié précédemment [1, 2] les solutions polynomiales des équations

$$zP''_n + (az^2 + bz + c)P'_n + (d + ez + fz^2)P_n = 0 \tag{1}$$

et

$$z(z-1)P''_n + (az^2 + bz + c)P'_n + (d + ez + fz^2)P_n = 0 \tag{2}$$

Nous avons trouvé que de telles solutions existaient effectivement lorsque certaines conditions étaient satisfaites et nous avons montré que les polynômes s'écrivaient comme combinaison linéaire d'un nombre fini et fixé de polynômes d'Hermite pour l'équation (1) et de Laguerre pour l'équation (2).

Dans cet article nous étudions les solutions polynomiales de l'équation

$$z(1-z)(\alpha - z)P''_n + (az^2 + bz + c)P'_n + (d + ez + fz^2)P_n = 0 \tag{3}$$

qui diffère de (2) par l'addition d'une singularité (on supposera $\alpha \neq 0, 1$).

Nous allons montrer que moyennant certaines conditions polynomiales l'équation (3) possède des solutions polynomiales qui s'écrivent comme combinaisons linéaires d'un nombre fini et fixé de polynômes de Jacobi.

Procédant comme lors des études précédentes [1, 2], introduisons la forme polynomiale $P_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k z^k$ dans (3), et exprimons que tous les λ à partir du rang $n+1$ sont nuls, λ_n étant différent de zéro. Il vient que $e = -n(n + a - 1)$ et $f = 0$

Présenté par F. Bureau, le 18 février 1971.

sont deux conditions nécessaires, auxquelles il convient encore d'adjoindre la condition déterminante

$$\begin{vmatrix} S_0 & T_0 & & & \\ R_1 & S_1 & T_1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & R_{n-1} & S_{n-1} & T_{n-1} \\ & & & R_n & S_n \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

où on a posé

$$\begin{aligned} R_k &= (k-1)(a+k-2) - n(n+a-1) \\ S_k &= d + bk - (\alpha+1)k(k-1) \\ T_k &= (k+1)(c+\alpha k) \end{aligned}$$

Il n'est guère possible d'expliciter davantage la condition polynomiale (4) car l'ordre du déterminant augmente avec l'ordre n du polynôme. Il est cependant possible de trouver une famille entière de solutions polynomiales : nous remarquons que si $c = -\alpha j\,(= 0, -\alpha, -2\alpha \;\ldots\, \textit{fixé})$, $T_j = 0$ et on trouve une solution au problème posé en adjoignant à

$$e = -n(n+a-1) \quad \text{et} \quad f = 0$$

la condition polynomiale supplémentaire

$$\begin{vmatrix} S_0 & T_0 & & & \\ R_1 & S_1 & T_1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & R_{j-1} & S_{j-1} & T_{j-1} \\ & & & R_j & S_j \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

2. *Forme des solutions polynomiales.*

Si dans (3) les conditions polynomiales suivantes sont réalisées :

$$c = -\alpha j\,(= 0, -\alpha, -2\alpha \;\ldots\, \textit{fixé}) \qquad (6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left.\begin{aligned} e &= -n(n+a-1) \\ f &= 0 \end{aligned}\right\} \text{deux conditions nécessaires} \\ & \begin{vmatrix} S_0 & T_0 & & & \\ R_1 & S_1 & T_1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & R_{j-1} & S_{j-1} & T_{j-1} \\ & & & R_j & S_j \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \right.$$

alors les polynômes P_n s'écrivent comme combinaison linéaire d'un nombre *fixé* de polynômes de Jacobi :

$$P_n = \sum_{k=0}^{j} A_k F\left(k - n, n - k + a + j - 1; \frac{a+b+c}{1-\alpha}; \frac{1-z}{1-\alpha}\right) \tag{7}$$

où

$$F(a, b; c; u) = 1 + \frac{ab}{c1!} u + \frac{a(a+1) b(b+1)}{c(c+1)2!} u^2 + \dots$$

Preuve.

Introduisons (7) dans (3). Tenant compte de l'équation différentielle satisfaite par les fonctions hypergéométriques, il reste à démontrer

$$\sum_{k=0}^{j} A_k \left\{ j(1-z)(\alpha - z) \frac{dF(k-n)}{dz} + \right.$$
$$\left. + [(2kn - k^2 + ak - k + jk - nj)z - d] F(k-n) \right\} = 0 ?$$

Tenant compte des relations de récurrence reliant

$(1-z)(\alpha - z) \dfrac{dF(k-n)}{dz}$ et $zF(k-n)$ d'une part, et

$F(k-1-n)$, $F(k-n)$ et $F(k+1-n)$ d'autre part il vient

$$\sum_{k=0}^{j} F(k-n) [\mathscr{R}_k A_{k-1} + \mathscr{S}_k A_k + \mathcal{T}_k A_{k+1}] = 0 ? \tag{8}$$

où on a posé

$$\left|\begin{array}{l}
\mathscr{R}_k = \dfrac{(\alpha - 1)(k-1-n)\left(\dfrac{a+b+c}{1-\alpha} - n + k - a - j\right)(2n-k+a+j)(k-j-1)}{(2n-2k+a+j+1)(2n-2k+a+j)} \\[2ex]
\mathscr{S}_k = [d - \alpha Bk - \alpha n(k-j)] - \dfrac{1-\alpha}{(B-A-1)(B-A+1)} \\[1ex]
\qquad \{jAB(2C-B-A-1) - [Bk + n(k-j)](1 - B^2 - A^2 - C + CB + CA)\} \\[2ex]
\mathcal{T}_k = \dfrac{(\alpha-1)(n-k+a+j-2)\left(\dfrac{a+b+c}{1-\alpha} - k - 1 + n\right)(k+1)(2n+a-k-2)}{(2n-2k+a+j-3)(2n-2k+a+j-2)}
\end{array}\right.$$

avec

$$A = k - n \quad B = n - k + a + j - 1 \text{ et } C = \frac{a+b+c}{1-\alpha}$$

La relation (8) est satisfaite si

$$\begin{vmatrix} \mathscr{S}_0 & \mathfrak{T}_0 & & & \\ \mathscr{R}_1 & \mathscr{S}_1 & \mathfrak{T}_1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \mathscr{R}_{j-1} & \mathscr{S}_{j-1} & \mathfrak{T}_{j-1} \\ & & & \mathscr{R}_j & \mathscr{S}_j \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

Puisque nous avons vu au paragraphe 1 que moyennant les conditions reprises dans l'énoncé du théorème, des solutions polynomiales existaient, et vu que l'expression (7) est polynomiale, on peut en conclure que la relation (9) est automatiquement satisfaite et équivalente à (5).

On peut probablement aller plus loin en affirmant que pour toute valeur de j on a l'égalité entre déterminants

$$\begin{vmatrix} S_0 & T_0 & & & \\ R_1 & S_1 & T_1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & R_{j-1} & S_{j-1} & T_{j-1} \\ & & & R_j & S_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathscr{S}_0 & \mathfrak{T}_0 & & & \\ \mathscr{R}_1 & \mathscr{S}_1 & \mathfrak{T}_1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \mathscr{R}_{j-1} & \mathscr{S}_{j-1} & \mathfrak{T}_{j-1} \\ & & & \mathscr{R}_j & \mathscr{S}_j \end{vmatrix}$$

Nous n'avons pu que la vérifier sur les exemples $j = 0$, $j = 1$ et $j = 2$.

La démonstration directe dans le cas général semble compliquée à cause de la forme très complexe de $\mathscr{R}_k$, $\mathscr{S}_k$ et $\mathfrak{T}_k$.

Remarque. Les coefficients A_k qui interviennent dans la solution (7) sont solutions du système récurrent toujours compatible :

$$\mathscr{R}_k A_{k-1} + \mathscr{S}_k A_k + \mathfrak{T}_k A_{k+1} = 0$$

3. *Théorèmes dérivés du précédent.*

Soit l'équation de départ (3) dont on recherche d'éventuelles solutions polynomiales. Nous avons vu que $e = -n(n + a - 1)$ et $f = 0$ étaient deux conditions nécessaires. Par contre la condition (6) $c = -\alpha j$ n'est pas obligatoire. Nous allons montrer que si on la remplace par une autre convenablement choisie il est encore possible de trouver des solutions polynomiales revêtant une allure comparable à (7).

On établit ce point en remarquant qu'à condition de bien choisir les valeurs des paramètres, une substitution linéaire du type $z = \lambda + \mu u$ peut laisser invariant *l'aspect* du coefficient de P''_n dans l'équation de départ.

Formellement on traduit ce fait en écrivant l'identité :

$$z(1 - z)(\alpha - z) = \nu u(1 - u)(\gamma - u)$$

Tenant compte de la valeur de z et identifiant dans les deux membres les coefficients d'une même puissance de u, on trouve le système :

$$\begin{cases} \lambda(1 - \lambda)(\alpha - \lambda) = 0 \\ \nu = \mu^3 \\ (1 - 2\lambda)(\alpha - \lambda)\mu - \lambda(1 - \lambda)\mu = \nu\gamma \\ \mu^2(3\lambda - \alpha - 1) + \nu(\gamma + 1) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Il y a trois cas à envisager qui fournissent chacun deux solutions.

Premier cas ; $\lambda = 0$.

Le système (10) devient

$$\begin{cases} \nu = \mu^3 \\ \alpha\mu = \nu\gamma \\ \mu^2(\alpha + 1) = \nu(\gamma + 1) \end{cases}$$

Éliminant ν à l'aide de la première équation et éliminant γ entre les deux dernières, il vient pour μ l'équation

$$\mu^2 - \mu(\alpha + 1) + \alpha = 0$$

$\mu_1 = 1$: ce cas est trivial, il restitue le théorème initial.

$\mu_2 = \alpha$.

Finalement, on a la solution :

$$\lambda = 0; \; \mu = \alpha^3; \; \gamma = \frac{1}{\alpha} \tag{11}$$

Deuxième cas ; $\lambda = 1$.

Le système (10) devient

$$\begin{cases} \nu = \mu^3 \\ \nu\gamma + (\alpha - 1)\mu = 0 \\ \mu^2(2 - \alpha) + \nu(\gamma + 1) = 0 \end{cases}$$

Opérant comme ci-dessus, il vient

$$\mu^2 + \mu(2 - \alpha) + (1 - \alpha) = 0$$

$$\mu_1 = \alpha - 1 \qquad \mu_2 = -1$$

Finalement, on a les solutions :

$$\begin{cases} \lambda = 1; \; \mu = -1; \; \nu = -1; \; \gamma = 1 - \alpha & (12) \\ \lambda = 1; \; \mu = \alpha - 1; \; \nu = (\alpha - 1)^3; \; \gamma = \dfrac{1}{1 - \alpha} & (13) \end{cases}$$

Troisième cas ; $\lambda = \alpha$.

$$\begin{cases} \nu = \mu^3 \\ \nu\gamma + \alpha(1 - \alpha)\mu = 0 \\ \mu^2(2\alpha - 1) + \nu(\gamma + 1) = 0 \end{cases}$$

Il vient de même

$$\mu^2 + \mu(2\alpha - 1) + \alpha(\alpha - 1) = 0$$

$$\mu_1 = -\alpha \qquad \mu_2 = 1 - \alpha$$

Finalement on a les solutions :

$$\begin{cases} \lambda = \alpha; \; \mu = -\alpha; \; \nu = -\alpha^3; \; \gamma = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha} & (14) \\ \lambda = \alpha; \; \mu = 1 - \alpha; \; \nu = (1 - \alpha)^3; \; \gamma = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1} & (15) \end{cases}$$

Cela fait, partons de l'équation (3) où nous tenons compte des conditions nécessaires $e = -n(n + a - 1)$ et $f = 0$:

$$z(1 - z)(\alpha - z)\frac{d^2\mathrm{P}_n}{dz^2} + (az^2 + bz + c)\frac{d\mathrm{P}_n}{dz} + [d - n(n + a - 1)z]\,\mathrm{P}_n = 0 \qquad (16)$$

Opérons la substitution $z = \lambda + \mu u$ où λ et μ obéissent à (9); on obtient :

$$u(1 - u)(\gamma - u)\frac{d^2\mathrm{P}_n}{du^2} + (a'u^2 + b'u + c')\frac{d\mathrm{P}_n}{du} + [d' - n(n + a' - 1)u]\,\mathrm{P}_n = 0 \quad (17)$$

si on pose

$$a' = a \qquad d' = \frac{d - n(n + a - 1)\lambda}{\mu}$$

$$b' = \frac{2a\lambda + b}{\mu} \qquad c' = \frac{a\lambda^2 + b\lambda + c}{\mu^2}$$

Appliquons à l'équation (17) le théorème énoncé au paragraphe 2, pour chaque jeu de valeurs de λ, μ, ν et γ trouvées ci-dessus. Nous trouvons ainsi cinq nouveaux théorèmes fournissant des solutions polynomiales de l'équation (16) selon les valeurs des paramètres a, b, c, d, α qui y interviennent. Les nouveaux énoncés se déduisent de celui du paragraphe 2 en y remplaçant partout

$$a \text{ par } a,\ b \text{ par } \frac{2a\lambda + b}{\mu},\ c \text{ par } \frac{a\lambda^2 + b\lambda + c}{\mu^2},\ d \text{ par } \frac{d - n(n + a - 1)\lambda}{\mu},$$

$$n \text{ par } n,\ \alpha \text{ par } \gamma \text{ et } z \text{ par } \frac{z - \lambda}{\mu}$$

Les valeurs de λ, μ, ν et γ sont données par les formules (11) à (15), un jeu de valeurs par nouvel énoncé.

Par exemple la condition polynomiale (6) $c = -\alpha j$ devient

$$c' = -\gamma j$$

ou encore

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = -j\,[\alpha(1 - 2\lambda) + \lambda(3\lambda - 2)]$$

si $\lambda = 0$ on retrouve (6) : $c = -j\alpha$

si $\lambda = 1$ on trouve la condition polynomiale $a + b + c = -j(1 - \alpha)$

si $\lambda = \alpha$ on trouve la condition polynomiale $a\alpha^2 + b\alpha + c = -j\alpha(\alpha - 1)$

A cette condition il faut encore adjoindre la condition déterminante que l'on déduit de la même manière.

Institut de Physique
Sart Tilman par Liège I (Belgique)

BIBLIOGRAPHIE

[1] André HAUTOT, *Bull. Soc. Roy. Liège*, **38**, (1969), 654.

[2] André HAUTOT, *Bull. Soc. Roy. Liège*, **38**, (1969), 660.