DEFINITION ET ETUDE DE QUELQUES PROPRIETES DES POLYNOMES DE WEBER

André HAUTOT *

RESUME

Nous définissons les polynômes de Weber dans le cadre de la théorie des fonctions de Weber suivant une procédure employée classiquement pour définir les polynômes de Lommel en théorie des fonctions de Bessel. Nous étudions quelques propriétés remarquables de cette famille de polynômes. Certaines propriétés rappellent étonnamment des propriétés analogues des polynômes de Lommel. D'autres par contre marquent une différence très nette entre les deux familles. Il existe une connexion remarquable entre les polynômes de Weber et ceux d'Hermite. Enfin la structure du développement en série de puissances des polynômes de Weber est assez inusitée, et à ce titre mérite qu'on s'y arrête.

I. INTRODUCTION

En théorie des fonctions de Bessel on définit une famille de polynômes (dits de Lommel) $R_{m,n}$ par la relation.

$$J_{\nu+m} = J_{\nu}\, R_{m,\nu} - J_{\nu-1}\, R_{m-1,\nu+1} \qquad (1)$$

L'étude des propriétés de ces polynômes est un sujet classique de théorie des fonctions spéciales (1).

---

* Université Nationale du Zaïre – Campus de Kinshasa, Faculté Polytechnique.
Adresse permanente : Université de Liège, Institut de Physique, Sart Tilman par 4000 Liège 1, Belgique.

Si l'on remplace dans (1) les fonctions de Bessel J_ν par des fonctions de Weber D_ν on peut montrer que l'on définit une nouvelle famille polynomiale $p^{m,\nu}$:

$$D_{\nu+m} = D_\nu \, p^{m,\nu} - \nu \, D_{\nu-1} \, p^{m-1,\,\nu+1} \tag{2}$$

C'est le but de ce travail que de montrer que la relation (2) peut effectivement être écrite et d'établir quelques propriétés remarquables de la famille des $p^{m,\nu}$.

Afin de dissiper toute équivoque concernant les notations utilisées, nous rappelons quelques propriétés des fonctions de Weber $D_\nu(u)$. Elles satisfont les équations suivantes :

$$D''_\nu + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{u^2}{4}\right) D_\nu = 0 \tag{3}$$

$$D_{\nu+1} = u\, D_\nu - \nu\, D_{\nu-1} \tag{4}$$

$$D'_\nu = \nu\, D_{\nu-1} - \frac{u}{2} D_\nu \tag{5}$$

$$D'_\nu = \frac{u}{2} D_\nu - D_{\nu+1} \tag{6}$$

Excluant provisoirement les valeurs entières négatives de ν, nous choisirons la solution de (3) linéairement indépendante de $D_\nu(u)$ sous la forme :

$$F_\nu(u) = \frac{1}{\sin(\pi\nu)} \left[\operatorname{Sin} \frac{(2\nu+1)\pi}{2} D_\nu(u) - D_\nu(-u) \right] \tag{7}$$

L'intérêt de la choisir sous cette forme réside dans le fait que F_ν satisfait les mêmes relations récurrentes que D_ν : (4), (5) et (6).
Le wronskien de D et F vaut :

$$W(D_\nu, F_\nu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \Gamma(\nu+1) \tag{8}$$

Une conséquence importante de (8) s'obtient en tenant compte de (5) dans la définition du wronskien :

$$W = D_\nu F'_\nu - D'_\nu F_\nu = \nu\,(D_\nu F_{\nu-1} - F_\nu D_{\nu-1}) \qquad \text{soit :}$$

$$D_\nu F_{\nu-1} - F_\nu D_{\nu-1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \Gamma(\nu) \tag{9}$$

II LES POLYNOMES DE WEBER

a. – Définition et relations de récurrence

La relation qui définit les polynômes de Weber est quasi identique à celle qui définit les polynômes de Lommel [1] excepté naturellement le remplacement des fonctions de Bessel par des fonctions de Weber. Appliquant la relation récurrente (4) m fois successivement, il est possible d'exprimer $D_{\nu+m}$ en fonction de D_ν et de $D_{\nu-1}$ sous la forme :

$$D_{\nu+m} = P^{m,\nu} D_\nu + Q^{m,\nu} D_{\nu-1}$$

où P et Q sont des polynômes en u.

Calculant $D_{\nu+m+1}$ en considérant que soit m soit ν a cru d'une unité, il vient :

$$P^{m+1,\nu} = u\,P^{m,\nu+1} + Q^{m,\nu+1}$$

(= coefficients de D_ν dans les deux membres)

$$Q^{m+1,\nu} = -\nu\,P^{m,\nu+1}$$

(= idem $D_{\nu-1}$).

On en déduit que $Q^{m,\nu} = -\nu\,P^{m-1,\nu+1}$ d'où la relation fondamentale qui définit les polynômes de Weber $P^{m,\nu}$:

$$D_{\nu+m} = P^{m,\nu} D_\nu - \nu\,P^{m-1,\nu+1} D_{\nu-1} \tag{10}$$

On en déduit également une première relation de récurrence entre les $P^{m,\nu}$:

$$P^{m+1,\nu-1} + \nu\,P^{m-1,\nu+1} = u\,P^{m,\nu} \tag{11}$$

$P^{m,\nu}(u)$ est un polynôme de degré m en u si $m \geqslant 0$.

Ecrivant la relation fondamentale (10) en remplaçant successivement m par $m-1$, par m et par $m+1$, on obtient trois relations entre lesquelles on élimine $D_{\nu+m-1}$, $D_{\nu+m}$ et $D_{\nu+m+1}$ avec l'aide de (4). Il reste :

$$P^{m+1,\nu} + (\nu+m)\,P^{m-1,\nu} = u\,P^{m,\nu} \tag{12}$$

Cette relation est particulièrement importante car elle relie entre elles trois polynômes de même indice ν. Elle permet donc de construire tous les polynômes de la famille dès que $P^{0,\nu}$ et $P^{1,\nu}$ sont connus. Or si l'on compare la relation (4) et la relation (10) où on prend m égal à l'unité, on trouve de suite :

$$P^{0,\nu} = 1 \text{ et } P^{1,\nu} = u.$$

Les autres membres de la famille suivent grâce à (12). De plus (12) permet d'étendre la définition de $P^{m,\nu}$ lorsque m est négatif. Nous verrons ultérieurement que (10) restera valable même dans ce cas.

On trouve :... $P^{-3,\nu} = -\dfrac{u}{(\nu-1)(\nu-2)}$

$P^{-2,\nu} = -\dfrac{1}{\nu-1}$ $\quad P^{-1,\nu} = 0$ $\quad P^{0,\nu} = 1$

$P^{1,\nu} = u$ $\quad P^{2,\nu} = u^2 - (\nu+1)$ $\quad P^{3,\nu} = u^3 - (2\nu+3)\,u$

$P^{4,\nu} = u^4 - (3\nu+6)\,u^2 + (\nu+1)(\nu+3)$

$P^{5,\nu} = u^5 - (4\nu+10)\,u^3 + (3\nu^2+15\nu+15)\,u$

$P^{6,\nu} = u^6 - (5\nu+15)\,u^4 + (6\nu^2+36\nu+45)u^2 - (\nu+1)(\nu+3)(\nu+5)$

etc...

D'une manière générale, la relation qui donne l'expression de $P^{m,\nu}$ lorsque m est négatif est :

$$P^{-m,\nu} = -\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu)}\, P^{m-2,\nu-m+1} \tag{13}$$

Nous avons vu que F_ν satisfait les mêmes relations de récurrence que D_ν. Dès lors la relation fondamentale (10) doit également être satisfaite par F_ν. Calculant $D_{\nu+m}F_{\nu-1} - F_{\nu+m}D_{\nu-1}$ en utilisant successivement (10) puis (9), on trouve :

$$D_{\nu+m}F_{\nu-1} - F_{\nu+m}D_{\nu-1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(\nu)\,P^{m,\nu} \tag{14}$$

b. – Valeurs particulières

Lorsque $\nu = 0$, les polynômes $P^{m,\nu}$ sont identiques aux polynômes d'Hermite He_m engendrés sous la forme :

$$\exp\left(uz - \frac{z^2}{2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} He_m(u)\,\frac{z^m}{m!}$$

En notations hypergéométriques généralisées, on a :

$$P^{m,o}(u) = u^m {}_2F_0\left(-\frac{m}{2}, \frac{1-m}{2}; -; -\frac{2}{u^2}\right)$$

car lorsque $\nu = o$, (12) se réduit à la relation de récurrence satisfaite par les polynômes He_m ; comme $He_0 = 1$ et $He_1 = u$, on a le résultat annoncé. Il ne semble cependant pas possible de proposer une forme hypergéométrique généralisée pour $P^{m,\nu}$ lorsque ν est quelconque : dans $P^{5,\nu}$ par exemple, le fait que le coefficient $3\nu^2 + 15\nu + 15$ ne peut être mis sous la forme d'un produit de deux fonctions simples du premier degré en ν écarte apparemment toutes les possibilités du côté des fonctions hypergéométriques. Quoi qu'il en soit, les polynômes de Weber $P^{m,\nu}$ apparaissent comme une généralisation des polynômes d'Hermite He_m conformément à la relation :

$P^{m,0}(u) = He_m(u)$. On reviendra sur ce point.

c. – Relations de récurrence où intervient la dérivée de $P^{m,\nu}$.

Dérivons la relation (14). On trouve successivement, en utilisant (5) et (6), puis en regroupant les termes deux à deux avec l'aide de (14) :

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(\nu)\, P^{m,\nu\,\prime} &= D'_{\nu+m}F_{\nu-1} + D_{\nu+m}F'_{\nu-1} - F'_{\nu+m}D_{\nu-1} - F_{\nu+m}D'_{\nu-1}\\ &= \left(\frac{u}{2}D_{\nu+m} - D_{\nu+m+1}\right)F_{\nu-1} + D_{\nu+m}\left(\frac{u}{2}F_{\nu-1} - F_\nu\right)\\ &\quad - \left(\frac{u}{2}F_{\nu+m} - F_{\nu+m+1}\right)D_{\nu-1} - F_{\nu+m}\left(\frac{u}{2}D_{\nu-1} - D_\nu\right)\end{aligned}$$

Finalement : $P^{m,\nu\,\prime} = u\,P^{m,\nu} - \nu\, P^{m-1,\nu+1} - P^{m+1,\nu}$ (15)

Combinant avec (12) ou avec (11), on trouve respectivement :

$$P^{m,\nu\,\prime} = (\nu+m)\,P^{m-1,\nu} - \nu P^{m-1,\nu+1} \tag{16}$$

$$P^{m,\nu\,\prime} = P^{m+1,\nu-1} - P^{m+1,\nu} \tag{17}$$

On vérifiera de même la relation

$$u\,P^{m,\nu\,\prime} = (\nu+m)\,P^{m,\nu-1} - \nu\, P^{m,\nu+1} \tag{18}$$

d. — Equation différentielle satisfaite par $P^{m,\nu}$.

Dérivons (15) :

$$P^{m,\nu''} = P^{m,\nu} + u\, P^{m,\nu'} - \nu\, P^{m-1,\nu+1'} - P^{m+1,\nu'}$$

Modifions l'avant-dernier terme avec l'aide de (17) et le dernier par (16) ; il reste une équation différentielle du deuxième ordre non homogène :

$$\frac{d^2P^{m,\nu}}{du^2} - u\,\frac{d\,P^{m,\nu}}{du} + (2\nu+m)\,P^{m,\nu} = 2\nu\,P^{m,\nu+1} \qquad (19)$$

Si l'on introduit (18) dans (19) on obtient de même :

$$\frac{d^2\,P^{m,\nu}}{du^2} + u\,\frac{d\,P^{m,\nu}}{du} + (2\nu+m)\,P^{m,\nu} = 2\,(\nu+m)\,P^{m,\nu-1} \qquad (20)$$

Notons les opérateurs suivants δ_1 et δ_2.

$$\delta_1 = \frac{d^2}{du^2} - u\,\frac{d}{du} + (2\nu+m)$$

$$\delta_2 = \frac{d^2}{du^2} + u\,\frac{d}{du} + (2\nu+m+2)$$

On a simultanément

$$\delta_1\,P^{m,\nu} = 2\nu\,P^{m,\nu+1}$$
$$\delta_2\,P^{m,\nu+1} = 2\,(\nu+m+1)\,P^{m,\nu}$$

On a donc :

$$\delta_2\,\delta_1\,P^{m,\nu} = 4\nu\,(\nu+m+1)\,P^{m,\nu}$$

qui est une équation différentielle homogène du quatrième ordre satisfaite par $P^{m,\nu}$. Explicitée, cette équation s'écrit :

$$\left\{\frac{d^4}{du^4} + [\,(4\nu+2m) - u^2\,]\,\frac{d^2}{du^2} - 3u\,\frac{d}{du} + (m^2+2m)\right\}P^{m,\nu} = 0 \qquad (21)$$

e. — Récurrences bilinéaires.

La relation (12) indique que $P^{m,\nu}$ satisfait le même type de relation récurrente que D_ν. En conséquence, on doit avoir une relation du type (10) qui s'écrit après transposition des notations.

$$P^{m+n,\nu} = P^{n,\nu+m} P^{m,\nu} - (\nu+m) P^{n-1,\nu+m+1} P^{m-1,\nu} \qquad (22)$$

On obtient d'autres relations bilinéaires de la manière suivante : on part de la relation(11) en la transformant en y remplaçant ν par $\nu+1$ et m par $m-1$. Eliminant u entre (11) et cette nouvelle relation, on a :

$$P^{m,\nu} P^{m,\nu+1} - P^{m+1,\nu} P^{m-1,\nu+1} = (\nu+m) [P^{m-1,\nu} P^{m-1,\nu+1} - P^{m,\nu} P^{m-2,\nu+1}$$

On constate que le premier terme est simplement divisé par $\nu+m$ lorsque l'on abaisse m d'une unité. Travaillant de proche en proche, on aboutit pour le second membre à :

$$(\nu+m)(\nu+m-1)\dots(\nu+1)[P^{0,\nu} P^{0,\nu+1} - P^{1,\nu} P^{-1,\nu+1}]$$

d'où la relation : $$P^{m,\nu} P^{m,\nu+1} - P^{m+1,\nu} P^{m-1,\nu+1} = \frac{p(\nu+m+1)}{p(\nu+1)} \qquad (23)$$

Cette relation est analogue à la relation de Crelier en théorie des polynômes de Lommel. La différence est qu'en théorie de Lommel, le second membre de la relation (23) vaut un. L'analogie entre les deux théories peut être poursuivie plus loin, si dans (11) on avait remplacé ν par $\nu+n$ et m par $m-n$, on aurait obtenu pour la même procédure :

$$P^{m,\nu} P^{m-n+1,\nu+n} - P^{m+1,\nu} P^{m-n,\nu+n} = \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu+n)} P^{n-1,\nu} \qquad (24)$$

On obtient la relation la plus générale reliant trois polynômes de Weber de même indice ν de la manière suivante : on part de la relation (24) où l'on remplace m par $m-1$ et n par $n+1$ ce qui donne une première équation. On écrit une deuxième équation en remplaçant simplement dans la première n par p. On élimine alors $P^{m-1,\nu}$ entre ces deux équations, cela donne :

$$\frac{\Gamma(\nu+m)}{\Gamma(\nu+p+1)} P^{p,\nu} P^{m-n-1,\nu+n+1} - \frac{\Gamma(\nu+m)}{\Gamma(\nu+n+1)} P^{n,\nu} P^{m-p-1,\nu+p+1}$$

$$= P^{m,\nu} [P^{m-n-2,\nu+n+1} P^{m-p-1,\nu+p+1} - P^{m-p-2,\nu+p+1} P^{m-n-1,\nu+n+1}]$$

On transforme aisément le deuxième membre avec l'aide de (24) ; simultanément, on transforme le second facteur du deuxième terme du premier membre par (13). Faisant cela on obtient la relation cherchée sous une forme très symétrique :

$$\Gamma(\nu+p+1)\, P^{m,\nu}\, P^{n-p-1,\nu+p+1} + \Gamma(\nu+m+1)\, P^{n,\nu}\, P^{p-m-1,\nu+m+1} + \Gamma(\nu+n+1)\, P^{p,\nu}\, P^{m-n-1,\nu+n+1} = 0$$

que l'on peut écrire

$$\sum_{m,n,p} \Gamma(\nu+p+1)\, P^{m,\nu}\, P^{n-p-1,\nu+p+1} = 0 \tag{25}$$

les indices effectuant une permutation circulaire $m \to n \to p \to m$

Une démonstration quelque peu compliquée utilisant (10), (13) et (25) et que nous omettrons ici établirait un résultat analogue reliant trois fonctions de Weber d'indices quelconques excepté qu'ils doivent différer par un entier :

$$\sum_{m,n,p} \Gamma(\nu+p+1)\, P^{n-1-p,\,\nu+p+1}\, D_{\nu+m} = 0$$

f. – Extension de la formule fondamentale (10) aux valeurs négatives de m

Partons du système

$$D_{\nu+m} = P^{m,\nu}\, D_\nu - \nu\, P^{m-1,\nu+1}\, D_{\nu-1}$$

$$D_{\nu+m-1} = P^{m-1,\nu}\, D_\nu - \nu\, P^{m-2,\nu+1}\, D_{\nu-1}$$

Eliminons $D_{\nu-1}$. Utilisant la relation (24) et remplaçant ν par $\nu-m$ dans l'équation obtenue, il reste :

$$P^{m-2,\,\nu-m+1}\, D_\nu - P^{m-1,\,\nu-m+1}\, D_{\nu-1} = -\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-m+1)}\, D_{\nu-m}$$

Transformons les deux termes du premier membre avec l'aide de (13) ; il reste :

$$D_{\nu-m} = P^{-m,\nu}\, D_\nu - \nu\, P^{-m-1,\nu+1}\, D_{\nu-1}$$

On conclut que la relation fondamentale (10) reste valable quand m est négatif.

g. – Formule de Graf

L'inspection de l'équation différentielle (21) satisfaite par $P^{m,\nu}(u)$ montre qu'elle demeure invariante si l'on effectue les changements suivants :

$$u \to i\,u\ ;\ m \to m\ ;\ \nu \to -\nu - m$$

Il est dès lors facile de voir que l'on a la relation suivante :

$$P^{m,\nu}(u) = (-i)^m P^{m,-\nu-m}(i\,u)$$

que nous nommons formule de Graf en souvenir d'une relation analogue existant en Théorie des polynômes de Lommel.

h. – Connexion entre les polynômes de Weber et les polynômes d'Hermite

Les polynômes d'Hermite tels qu'ils sont définis au paragraphe b sont un cas particulier des polynômes de Weber. $He_m(u) = P^{m,o}(u)$. Dans le cas général où ν n'est pas nul, il est encore possible de relier ces deux familles de polynômes. Procédons en deux étapes.

Lorsque m et n sont entiers tels que $m \geqslant n \geqslant o$, on a la relation

$$P^{m,-n}(u) = (-i)^n He_n(iu)\, He_{m-n}(u)$$

où He_m sont les polynômes d'Hermite définis au paragraphe b . Pour démontrer ce résultat, on part de (22) où on a préalablement permuté m et n. On pose $\nu = -n$ et on remplace partout m par $m-n$, il reste :

$$P^{m,-n}(u) = P^{m-n,o}(u)\, P^{n,-n}(u)$$

Le dernier facteur du deuxième membre peut être modifié avec l'aide de la formule de Graf et il reste :

$$P^{m,-n}(u) = (-i)^n P^{n,o}(iu)\, P^{m-n,o}(u)$$

$$= (-i)^n He_n(iu)\, He_{m-n}(u).$$

Cette formule est très remarquable car elle exprime $P^{m,\nu}$ sous une forme très simple lorsque ν est entier négatif de module inférieur ou égal à m. C'est alors un jeu de construire $P^{m,\nu}$ lorsque ν est quelconque ; il suffit de construire une expression qui chaque fois que ν prend une valeur entière négative j de module $\leqslant$ m se réduit à :

$$(-i)^j \, He_j\,(i\,u)\, He_{m-j}\,(u).$$

Cette expression est unique.

$$P^{m,\nu}(u) = \frac{\Gamma\,(\nu+1+[\frac{m}{2}])}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=o}^{[\frac{m}{2}]} \frac{i^k}{k!\ \ ([\frac{m}{2}]-k)!} \frac{He_k\,(iu)\, He_{m-k}\,(u)}{\nu+k}$$

Où Γ désigne la fonction gamma, et $[\frac{m}{2}]$ le plus grand entier compris dans $\frac{m}{2}$
Lorsque $\nu = -j$, on vérifie sans peine que tous les termes de la somme s'annulent sauf un (celui pour lequel $k = j$) à cause du facteur :

$$X_k = \frac{1}{-j+k} \frac{\Gamma\,(-j+1+[\frac{m}{2}])}{\Gamma\,(-j)} = \frac{-j\,(-j+1)\ldots(-j+k)\ldots(-j+[\frac{m}{2}])}{(-j+k)}$$

De plus on vérifie que

$X_j = (-1)^j\ j!\ \ ([\frac{m}{2}]-j)!$ de telle sorte que lorsque $\nu = -j$, la formule générale se réduit à :

$P^{m,-j} = (-i)^j\ He_j\,(iu)\ He_{m-j}\,(u)$ comme annoncé, et pour toute valeur de $j \leqslant m$. En fait la sommation s'arrête à $[\frac{m}{2}]$ car $P^{m,\nu}_{(u)}$ est un polynôme en ν de degré $[\frac{m}{2}]$.

Ce résultat est remarquable dans la mesure où il montre que l'équation différentielle du quatrième ordre (21) possède comme solutions polynominales des combinaisons linéaires bien choisies de produits de deux polynômes d'Hermite. Il ne s'agit probablement pas d'une coïncidence et ce résultat est sans doute susceptible d'extensions vers d'autres familles polynominales.

Les conséquences de ce résultat sont très nombreuses ; en fait on pourrait multiplier les variations à l'infini. Nous nous limiterons aux deux propriétés essentielles qui font l'objet du paragraphe suivant.

i. — Représentation intégrale et développement en série de puissance

Dans la relation qui termine le paragraphe précédent, il n'est pas obligatoire de limiter la sommation à $[\frac{m}{2}]$. On peut sommer jusque m puisque ce faisant on ne fait qu'exprimer que $P^{m,\nu}(u)$ considéré comme polynôme en ν prend des valeurs connues quand $\nu = 0, -1, -2, \ldots, -m$. Il ne pourrait y avoir d'incompatibilité et l'on peut écrire :

$$P^{m,\nu}(u) = \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=o}^{m} \frac{i^k}{k!\ (m-k)!} \frac{He_k(iu)\ He_{m-k}(u)}{\nu + k}$$

Or il existe dans la théorie des polynômes d'Hermite un théorème d'addition que l'on écrit classiquement sous la forme (2) ;

$$(a^2 + b^2)^{m/2}\ He_m \frac{ax + by}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \sum_{k=o}^{m} \frac{m!}{k!\ (m-k)!} a^k b^{m-k} He_k(x)\, He_{m-k}(y)$$

qui rappelle d'assez loin l'expression obtenur pour $P^{m,\nu}(u)$. Rapprochons davantage ces deux formules en posant dans la deuxième :

$a = i z$, $b = 1$, $x = i u$ et $y = u$. Il vient

$$F(z) = \sum_{k=o}^{m} \frac{i^k z^{\nu+k-1}}{k!\ (m-k)!} He_k(iu)\, He_{m-k}(u)$$

$$= \frac{z^{\nu-1}}{m!} (1 - z^2)^{m/2}\ He_m\left[u \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \right]$$

Or on a visiblement :

$P^{m,\nu}(u) = \dfrac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu)} \int_\alpha^1 F(z)\, dz$ où α est une racine de la primitive choisie de F.

Lorsque $\nu \geqslant 0$ on peut prendre $\alpha = 0$ et il reste la formule intégrale :

$$P^{m,\nu}(u) = \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{m!\ \Gamma(\nu)} \int_o^1 z^{\nu-1} (1-z^2)^{m/2}\ He_m\left[u \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \right) dz$$

On pourrait tirer de cette formule des conséquences en nombre infini. Bornons-nous à en déduire le développement en série de puissance de u de $P^{m,\nu}(u)$. Vu que

$$He_m(u) = \sum_{k=o}^{[m/2]} \frac{(-1)^k\, m!}{2^k\, k!\ (m-2k)!}\ y^{m-2k}$$

on calcule de suite :

$$P^{m,\nu}(u) = \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{m!\ \Gamma(\nu)} \sum_{k=o}^{[\frac{m}{2}]} \frac{(-1)^k\, m!\ u^{m-2k}}{2^k\, k!\ (m-2k)!} \int_o^1 z^{\nu-1}\,(1-z)^{m-k}\,(1+z)^k\, dz$$

Remémorant la définition sous forme intégrale de la fonction hypergéométrique :

$$F(a;b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_o^1 t^{b-1}\,(1-t)^{c-b-1}\,(1-tz)^{-a}\, dt$$

il vient le développement cherché :

$$P^{m,\nu}(u) = \sum_{k=o}^{[\frac{m}{2}]} \frac{(-1)^k\,\Gamma(m-k+1)}{2^k\, k!\ (m-2k)!} \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu+m-k+1)} F(-k,\nu;m+\nu-k+1;-1)u^{m-2k}$$

On note que le facteur hypergéométrique intervenant dans ce développement est un polynôme de degré k, l'argument étant -1.

Telle est donc la solution de l'équation différentielle (21) du quatrième ordre. Notons qu'il eût été pratiquement impossible de résoudre cette équation différentielle par la voie habituelle.

La présence dans ce développement du facteur hypergéométrique le rend particulièrement digne d'intérêt.

BIBLIOGRAPHIE

(1) G.N. WATSON : *Theory of Bessel functions (1944) Cambridge at the University Press.*

(2) H. BUCHHOLZ : *The confluent hypogeometric function.* Springer-Verlag, 1969.