SUR UNE GENERALISATION DES EQUATIONS DE BESSEL ET DE WEBER

André HAUTOT *

RESUME

Nous recherchons l'équation différentielle du second ordre satisfaite par la fonction $f = \lambda_o J_n + \lambda_1 J_{n+1} + \dots + \lambda_m J_{n+m}$ qui combine linéairement de façon quelconque $m+1$ fonctions de Bessel d'indices consécutifs. Nous montrons que les coefficients de f'', f' et f dans l'équation différentielle sont des polynômes de degrés $m+2$, $m+1$ et $m+2$ respectivement, s'exprimant linéairement à partir des polynômes de Lommel. Nous procédons de même avec une combinaison linéaire quelconque de $m+1$ fonctions de Weber. Les coefficients polynomiaux de l'équation différentielle cherchée s'expriment dans ce cas à partir des polynômes de Weber définis dans l'article qui précède.

---

* Université Nationale du Zaïre – Campus de Kinshasa – Faculté Polytechnique.
Adresse permanente : Université de Liège, Institut de Physique, Sart Tilman par 4000 Liège 1. Belgique.

INTRODUCTION

Nous avons étudié au long de quatre articles antérieurs [1] les équations différentielles du second ordre satisfaites par des combinaisons linéaires bien choisies d'un nombre arbitraire de fonctions transcendantes d'indices consécutifs et par des combinaisons linéaires quelconques de deux telles fonctions. Pour ce qui regarde les combinaisons linéaires de fonctions de Bessel, nous étions parvenue à la conclusion que la fonction $f = J_n + \lambda J_{n+1}$ satisfait l'équation du second ordre :

$$u^2 \left[u + \frac{\lambda(2n+1)}{\lambda^2+1} \right] f'' + \left[u + \frac{2\lambda(2n+1)}{\lambda^2+1} \right] u f'$$

$$+ \left[u^3 + \frac{\lambda(2n+1)}{\lambda^2+1} u^2 - \frac{n^2 + \lambda^2 (n+1)^2}{\lambda^2+1} u - \frac{\lambda n (n+1)(2n+1)}{\lambda^2+1} \right] f = 0.$$

Une équation analogue existe pour la fonction $D_\nu + \lambda D_{\nu+1}$ qui combine deux fonctions de Weber.

Nous n'avons pas étudié le problème lorsque la combinaison linéaire contient plus de deux fonction de Bessel. Toutefois en concluant le dernier article de la série [1], nous émettions l'opinion que lorsque l'on inclut des fonctions supplémentaires dans la combinaison linéaire d'indices $n+2$, $n+3, \ldots, n+m$, il faut sans doute prévoir dans l'équation différentielle correspondante une singularité supplémentaire pour chaque terme ajouté soit au total $m+1$ singularités. C'est ce point que nous nous proposons de vérifier ici en le précisant notablement. Nous envisagerons successivement deux généralisations : la première traitera des combinaisons linéaires de fonctions de Bessel et la deuxième des combinaisons linéaires de fonctions de Weber.

II. GENERALISATION DE L'EQUATION DE BESSEL

Soit la combinaison linéaire arbitraire de m+ 1 fonctions de Bessel :

$$f = \sum_{k=o}^{m} \lambda_k \, J_{n+k} \tag{1}$$

Nous allons montrer qu'elle satisfait une équation différentielle du type :

$$u^2 \, P^{(m)}(u) \, f'' + u \, Q^{(m)}(u) \, f' + \mathcal{R}^{(m+2)}(u) \, f = 0 \tag{2}$$

P, Q et $\mathcal{R}$ sont des polynômes en u de degrés m, m et m+2 respectivement. Nous construirons ces polynômes. Leur structure présente d'ailleurs certaines particularités que nous établirons en chemin :

1) Le polynôme Q se déduit de P par la relation

$$Q^{(m)}(u) = (m+1) \, P^{(m)}(u) - u \, P^{(m)'}(u)$$

Par exemple, si $P^{(5)} = u^5 + a\,u^4 + b\,u^3 + c\,u^2 + d\,u + e$

alors on a $Q^{(5)} = u^5 + 2\,a\,u^4 + 3\,b\,u^3 + 4\,c\,u^2 + 5\,d\,u + 6\,e$

2) La recherche du polynôme $\mathcal{R}$ du degré m+2 se ramème à celle d'un polynôme S(m) de degré m ainsi qu'on le verra par la relation

$$\mathcal{R}^{(m+2)} = u^2 \, P^{(m)} + S^{(m)} \tag{3}$$

Pour abréger les écritures, nous omettrons les indices supérieurs dans l'écriture de P, Q, $\mathcal{R}$ et S. Introduisons la fonction (1) dans l'équation (2), on obtient

$$u^2 \, P \sum_o^m \lambda_k \, J''_{n+k} + u \, Q \sum_o^m \lambda_k \, J'_{n+k} + \mathcal{R} \sum_o^m \lambda_k \, J_{n+k} = 0$$

Eliminons les termes en J''_{n+k} grâce à l'équation de Bessel ; il reste

$$\sum_{k=0}^{m} \lambda_k \left\{ [(n+k)^2 P + S] J_{n+k} + u\,(Q-P)\, J'_{n+k} \right\} = 0 \qquad (4)$$

La suite des développements analytiques fait intervenir la théorie des polynômes de Lommel. Nous allons les définir et en énoncer quelques propriétés utiles telles que nous les trouvons dans l'ouvrage de WATSON(2).

Les polynômes de Lommel notés $R_{m,\nu}(u)$ sont d'ordre m en $\frac{1}{u}$ et en ν. Ils sont définis par la relation fondamentale :

$$J_{\nu+m} = J_{\nu} R_{m,\nu} - J_{\nu-1,} R_{m-1,\nu+1}$$

On note que les fonctions de Bessel de seconde espèce Y satisfont la même relation ; de plus on a la relation :

$$Y_{\nu+m} J_{\nu-1} - J_{\nu+m} Y_{\nu-1} = -\frac{2}{\pi u} R_{m,\nu} \qquad (5)$$

Par ailleurs les polynômes de Lommel satisfont un grand nombre de relations de récurrence parmi lesquelles

$$R_{m-1,\nu} + R_{m+1,\nu} = \frac{2(\nu+m)}{u} R_{m,\nu} \qquad (6)$$

$$R_{m-1,\nu} + R_{m+1,\nu} - R_{m-1,\nu+1} - R_{m+1,\nu-1} = \frac{2(m+1)}{u} R_{m,\nu} \qquad (7)$$

$$R'_{m,\nu} = -\frac{m}{u} R_{m,\nu} + R_{m-1,\nu} - R_{m-1,\nu+1} \qquad (8)$$

$$R'_{m,\nu} = \frac{2\nu+m}{u} R_{m,\nu} - R_{m-1,\nu+1} - R_{m+1,\nu} \qquad (9)$$

$$R_{-m-2,\nu+m+1} = -R_{m,\nu} \qquad (10)$$

$$R_{m,\nu} R_{m,\nu+1} - R_{m+1,\nu} R_{m-1,\nu+1} = 1 \qquad (11)$$

Ces relations suffisent pour l'étude qui nous occupe ici. Notons $g = \sum_{k=o}^{m} \lambda_k Y_{n+k}$ une solution de (2) linéairement indépendante de f :

on a simultanément $$u^2 P f'' + u Q f' + \mathcal{R} f = 0 \qquad (12)$$

$$u^2 P g'' + u Q g' + \mathcal{R} g = 0 \qquad (13)$$

où P, Q et $\mathcal{R}$ sont des fonctions inconnues polynômiales ou non. Multipliant la première de ces équations par g (resp. par g') et la seconde par f (resp, f') et soustrayant membre à membre les deux égalités, il vient :

$$u^2 \, P W' = - u Q W \qquad (14)$$

$$u^2 \, P(f'g'' - f''g') = \mathcal{R} W \qquad (15)$$

où W est wronskien de l'équation différentielle cherchée (2) : $W = fg' - f'g$, et où W' et la dérivée de ce wronskien.

Puisque nous connaissons f et g, nous pouvons espérer calculer W, W' et $f'g'' - f''g'$.

a) Calcul de wronskien $W = fg' - f'g$.

$$W = \sum_{k=o}^{m} \sum_{j=o}^{m} \lambda_k \lambda_j [J_{n+k} Y'_{n+j} - J'_{n+k} Y_{n+j}]$$

$$W = \sum_{k=o}^{m} \sum_{j=o}^{m} \lambda_k \lambda_j [Y_{n+j} J_{n+k+1} - Y_{n+j+1} J_{n+k} + \frac{j-k}{u} J_{n+k} Y_{n+j}]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=o}^{m} \sum_{j=o}^{m} \lambda_k \lambda_j [Y_{n+j} J_{n+k+1} + Y_{n+k} J_{n+j+1} + \frac{j-k}{u} (J_{n+k} Y_{n+j} - J_{n+j} Y_{n+k})$$

$$- Y_{n+j+1} J_{n+k} - Y_{n+k+1} J_{n+j}]$$

Regroupons les termes deux à deux de telle sorte que (5) soit applicable :

$$= \frac{1}{2} \frac{2}{\pi u} \sum_{k=o}^{m} \sum_{j=o}^{m} \lambda_k \lambda_j [R_{j-k,n+k+1} + R_{k-j,n+j+1} - \frac{j-k}{u} R_{j-k-1,n+k+1}]$$

Eliminant le dernier terme avec l'aide de (7) et modifiant le deuxième grâce à (10) il reste finalement :

$$W = \frac{1}{\pi u} \sum_{k=o}^{m} \sum_{j=o}^{m} \lambda_k \lambda_j [R_{j-k,\, n+k} + R_{j-k,\, n+k+1}] \tag{16}$$

Le wronskien de l'équation cherchée s'exprime donc linéairement en fonction des polynômes de Lommel.

b) Calcul de la dérivée du wronskien W'.

$$W' = \frac{1}{\pi} \sum_{k=o}^{m} \sum_{j=o}^{m} \lambda_k \lambda_j [(\frac{1}{u} R_{j-k,\, n+k})' + (\frac{1}{u} R_{j-k,\, n+k+1})']$$

Explicitant le calcul des dérivées et utilisant les formules (8) et (7) dans cet ordre, on trouve finalement :

$$W' = \frac{1}{\pi u^2} \sum_{k=o}^{m} \sum_{j=o}^{m} \lambda_k \lambda_j [(n+j-1)\, R_{j-k,\, n+k-1} - (n+j+1)\, R_{j-k,\, n+k+1}] \tag{17}$$

c) Calcul de l'expression T = f'g'' – f''g'

$$u^2 T = \sum_{k=o}^{m} \sum_{j=o}^{m} \lambda_k \lambda_j [u^2 J'_{n+k} Y''_{n+j} - u^2 J''_{n+k} Y'_{n+j}]$$

Tenant compte de l'équation de Bessel, il vient :

$$u^2 T = \sum_k \sum_j \lambda_k \lambda_j \left\{ [(n+j)^2 - u^2]\, J'_{n+k} Y_{n+j} - [(n+k)^2 - u^2]\, J_{n+k} Y'_{n+j} \right\}$$

$$= (u^2 - n^2) W + \sum_k \sum_j \lambda_k \lambda_j [(j^2 + 2jn)\, J'_{n+k} Y_{n+j} - (k^2 + 2kn)\, J_{n+k} Y'_{n+j}]$$

$$= (u^2 - n^2) W + \frac{1}{2} \sum_k \sum_j \lambda_k \lambda_j [(j^2 + 2jn)\, J'_{n+k} Y_{n+j} - (k^2 + 2kn)\, J_{n+k} Y'_{n+j}$$

$$+ (k^2 + 2kn)\, J'_{n+j} Y_{n+k} - (j^2 + 2jn)\, J_{n+j} Y'_{n+k}]$$

Utilisant la relation (5) deux fois, il vient :

$$u^2 T = (u^2 - n^2) W + \frac{1}{2} \sum_k \sum_j \lambda_k \lambda_j \left\{ (k^2 + 2kn) \frac{2}{\pi u} [\frac{n+j}{u} R_{j-k-1,n+k+1} - R_{j-k,\, n+k+1}] \right.$$
$$\left. + \text{ Idem } (k \leftrightarrow j) \right\}$$

Utilisant la relation (6) il vient finalement :

$$u^2 T = (u^2 - n^2) \; W + \frac{1}{\pi u} \sum_{k=o}^{m} \sum_{j=o}^{m} \lambda_k \lambda_j (k^2 + 2kn) [R_{j-k-2,\, n+k+1} - R_{j-k, n+k+1}]$$

(18)

Les trois quantités que nous venons de calculer satisfont le système (14-15), réécrivons-le sous une forme légèrement différente :

$$- u^{m+1} W Q = u^{m+2} W' P$$
$$u^{m+1} (u^2 T) P = u^{m+1} W \mathcal{R} \qquad (19)$$

Les expressions $u^{m+1} W$, $u^{m+2} W'$ et $u^{m+3} T$ étant des polynômes en u dont les racines sont en général sans rapport entre elles vu la valeur arbitraire des coefficients λ_k, le système (19) ne peut être satisfait qu'en posant :

$$P = a\, u^{m+1} W$$
$$Q = - a\, u^{m+2} W' \qquad (20)$$
$$\mathcal{R} = a\, u^{m+1} (u^2 T)$$

a est une fonction quelconque de u. On voit que si l'on introduit ces expressions dans l'équation cherchée (2), ce facteur a disparaît de telle sorte qu'on peut l'ignorer ou le considérer comme constant.

Le problème est donc complètement résolu : la fonction $f = \sum_{k=o}^{m} \lambda_k J_{n+k}$

satisfait l'équation différentielle du second ordre à m+1 singularités :

$$u^2 P f'' + u Q f' + \mathcal{R} f = 0$$

où P, Q et $\mathcal{R}$ sont des polynômes de degrés m, m et m+2 respectivement, donnés par les formules (16), (17), (18) et (20).

En particulier, les formules (20) permettent de vérifier immédiatement la relation :

$$Q = (m + 1) P - uP'$$

Exemple :

La fonction $f = J_n + \lambda J_{n+1} + \mu J_{n+2}$

satisfait l'équation différentielle

$$u^2 (u^2 + \alpha u + \beta) f'' + (x u^2 + yu + z) u f' + (au^4 + bu^3 + cu^2 + du + e) f = 0$$

où les coefficients ont les valeurs suivantes :

$$x = 1$$

$$\alpha = \frac{\lambda [\mu(2n+3) + (2n+1)]}{\lambda^2 + (\mu-1)^2} \qquad \beta = \frac{4\mu (n+1)^2}{\lambda^2 + (\mu-1)^2}$$

$$y = \frac{2\lambda [\mu(2n+3) + (2n+1)]}{\lambda^2 + (\mu-1)^2} \qquad z = \frac{12\mu (n+1)^2}{\lambda^2 + (\mu-1)^2}$$

$$a = 1 \quad b = \frac{\lambda [\mu(2n+3) + (2n+1)]}{\lambda^2 + (\mu-1)^2} \quad c = \frac{2\mu(3n^2+6n+4) - n^2 - \mu^2(n+2)^2 - \lambda^2(n+1)^2}{\lambda^2 + (\mu-1)^2}$$

$$d = \frac{-\lambda n(n+1) [\mu (2n+3) + (2n+1)] - 2\lambda\mu (n+1)(2n+3)}{\lambda^2 + (\mu-1)^2}$$

$$e = -\frac{4\mu n (n+1)^2 (n+2)}{\lambda^2 + (\mu-1)^2}$$

III. GENERALISATION DE L'EQUATION DE WEBER

C'est un résultat du même genre que nous établissons ici sauf que les fonctions de Bessel J_ν sont remplacées par des fonctions de Weber D_ν. Nous recherchons donc l'équation différentielle satisfaite par la fonction :

$$f = \lambda_o D_\nu + \lambda_1 D_{\nu+1} + \ldots + \lambda_m D_{\nu+m}$$

Les fonctions D_ν sont définies en conformité avec les notations suivantes [(3)] :

$$D''_\nu + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{u^2}{4}\right) D_\nu = 0 \qquad (20)$$

$$D_{\nu+1} = u\, D_\nu - \nu\, D_{\nu-1}.$$

Recherchons l'équation satisfaite par f sous la forme d'une équation du second ordre :

$$Pf'' + Q\, f' + \mathcal{R} f = 0 \qquad (22)$$

Soit $g = \sum_{k=o}^{m} \lambda_k F_{\nu+k}$ une solution de (22) linéairement indépendante de f où F_ν, solution de (21) linéairement indépendante de D_ν a été définie dans l'article précédent [(3)]. On a donc :

$$P\, g'' + Q\, g' + \mathcal{R}\, g = 0 \qquad (23)$$

Travaillant comme au paragraphe précédent, on obtient assez facilement en combinant les équations (22) et (23) la solution sous une forme analogue à celle rencontrée lors de la généralisation de l'équation de Bessel. Il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} P &= \alpha\ W \\ Q &= -\alpha\ W' \\ \mathcal{R} &= \alpha\ T \end{aligned} \qquad (24)$$

où α peut être pris constant égal à 1 puisque il multiplie tous les termes de l'équation cherchée.

a. – Calcul du wronskien.

$$W = \sum_{k=o}^{m} \sum_{j=o}^{m} \lambda_k \lambda_j \; [D_{\nu+k} F'_{\nu+j} - D'_{\nu+k} F_{\nu+j}]$$

$$= \sum_k \sum_j \lambda_k \lambda_j \; [D_{\nu+k+1} \; F_{\nu+j} - D_{\nu+k} \; F_{\nu+j+1}]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_k \sum_j \lambda_k \lambda_j \; [D_{\nu+k+1} \; F_{\nu+j} + D_{\nu+j+1} \; F_{\nu+k} - D_{\nu+k} \; F_{\nu+j+1} - D_{\nu+j} \; F_{\nu+k+1}]$$

Regroupant les termes deux à deux et utilisant (14),[3] il reste finalement (*)

$$W = \sum_{k=o}^{m} \sum_{j=o}^{m} \lambda_k \lambda_j \sqrt{\frac{2}{\pi}} \; \Gamma\,(\nu+k+1) \; P^{j-k,\nu+k+1} \tag{25}$$

Donc le polynôme P s'exprime linéairement à partir des polynômes de Weber. Il est inutile de calculer la dérivée du wronskien W' puisque les relations (29) indiquent que lorsque P est connu, W s'en déduit par la relation :

$$Q = - P' \tag{24}$$

b. – Calcul de T.

$$T = \sum_k \sum_j \lambda_k \lambda_j \, [D'_{\nu+k} F''_{\nu+j} - D''_{\nu+k} F'_{\nu+j}]$$

Utilisant (3) pour éliminer les dérivées secondes, (5) et (6) pour éliminer les dérivées premières, symétrisant par rapport à j et k le résultat obtenu comme il a été fait au a. – ci-dessus et enfin regroupant les termes deux à deux, on obtient via (14) et (13) :

$$T = (\nu+\frac{1}{2} - \frac{u^2}{4})\, W + \frac{1}{2} \sum_k \sum_j \lambda_k \lambda_j \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Big\{ \frac{u}{2} [k\, \Gamma(\nu+j+1) P^{k-j-1,\nu+j+1} + j\, \Gamma(\nu+k+1)\, P^{j-k-1,\, \nu+k+1}]$$

$$- [k\, \Gamma(\nu+j+2)\, P^{k-j-2,\, \nu+j+2} + j\, \Gamma(\nu+k+2)\, P^{j-k-2,\nu+k+2}] \Big\}$$

(*) La notation (14)[3] renvoie à la formule (14) de la référence (3).

Utilisant les relations (11)[3] et 13[3], il vient finalement.

$$T = (\nu + \frac{1}{2} - \frac{u^2}{4})W + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} \lambda_k \lambda_j \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, k \left[\Gamma(\nu+j+1) P^{k-j,\nu+j} + \Gamma(\nu+k+1) P^{j-k,\nu+k+1}\right] \tag{26}$$

Le problème posé pour la généralisation de l'équation de Weber est résolu, la fonction $f = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k D_{\nu+k}$ satisfaisant l'équation différentielle du second ordre :

$$W f'' - W' f + T f = 0$$

où W, W' et T sont donnés par les relations (25) et (26). Ce sont des polynômes de degrés m, m−1 et m+2 respectivement qui s'expriment linéairement à partir des polynômes de Weber.

Exemple :

La fonction $f = D_\nu + \lambda D_{\nu+1} + \mu D_{\nu+2}$

satisfait l'équation différentielle

$$(\alpha u^2 + \beta u + \gamma) f'' + (\delta u + \epsilon) f' + (a u^4 + b u^3 + c u^2 + du + e) f = 0$$

où les paramètres prennent les valeurs suivantes :

$\alpha = \mu$ $\quad\beta = \lambda(\mu\nu + \mu + 1)$ $\quad\gamma = \lambda^2(\nu+1) + \mu^2(\nu+1)(\nu+2) - \mu(2\nu+3) + 1$

$\delta = -2\mu$ $\quad\epsilon = -\lambda(\mu\nu + \mu + 1)$

$a = -\frac{1}{4}\mu$ $\quad b = -\frac{1}{4}\lambda(\mu\nu + \mu + 1)$ $\quad c = -\frac{1}{4}[\lambda^2(\nu+1) + \mu^2(\nu+1)(\nu+2) - 3\mu(2\nu+3) + 1]$

$d = \lambda(\mu\nu^2 + 3\mu\nu + 2\mu + \nu + 1)$

$e = \lambda^2(\nu+1)(\nu+\frac{3}{2}) + \mu^2(\nu+1)(\nu+2)(\nu+\frac{5}{2}) - \mu(2\nu^2 + 6\nu + \frac{7}{2}) + \nu + \frac{1}{2}$

BIBLIOGRAPHIE

(1) André HAUTOT, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, *40*, (1971), 13.

(2) G.N. WATSON, Theory of Bessel functions (1944) Cambridge at the University Press.

(3) André HAUTOT, Définition et étude de quelques propriétés des polynômes de Weber (à paraître).